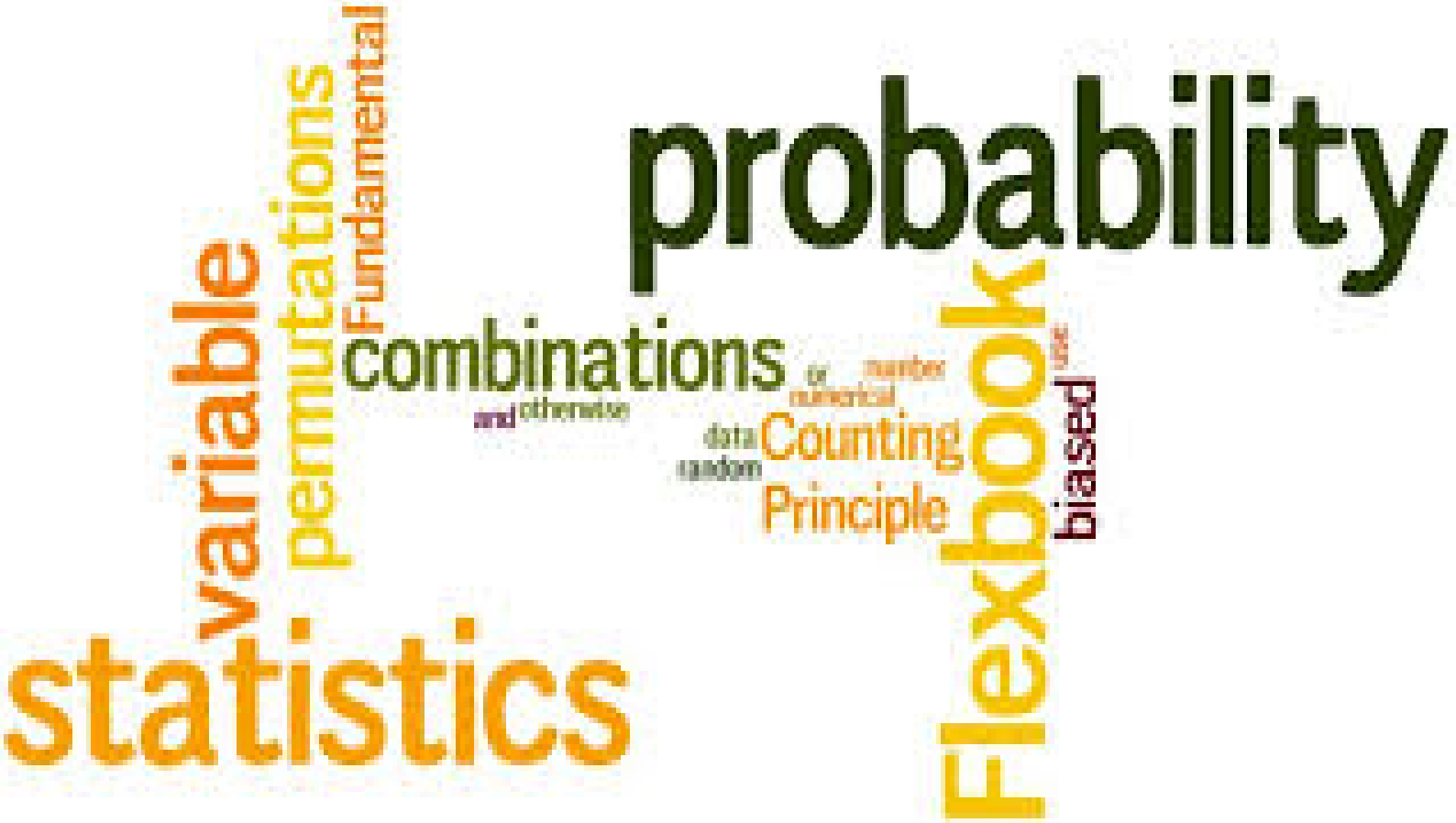
UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA
DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

NOTES DE COURS



DR. KHADRA BOUANANE

TABLE DES MATIÈRES

1 Notions élémentaires de la théorie des probabilités. 4

1 Introduction . . . 4
2 Quelques définitions . . . 4
3 Notion de tribu . . . 7
4 Notion de probabilité . . . 8
5 Caractérisation des probabilités dans le cas d'événements équiprobables. . . . 9
6 Probabilités conditionnelles . . . 10
7 Application : Fiabilité d'un système . . . 14
8 Exercices . . . 16

2 Variable aléatoire 22

1 Exemple introductif . . . 22
2 Variable aléatoire . . . 22
3 Variable aléatoire discrète . . . 25
4 Variable aléatoire absolument continue . . . 30
5 Exercices . . . 33

3 Lois de probabilité usuelles 36

1 Lois discrètes usuelles . . . 36
2 Lois continues usuelles . . . 43
3 Approximation de lois . . . 52
4 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev . . . 54
5 Exercices . . . 54

4 Vecteurs aléatoires 60

1 Introduction . . . 60

2 Vecteurs aléatoires discrets 60
3 Vecteurs aléatoires continus 65
4 Espérance conditionnelle 68
5 Covariance et coefficient de corrélation 69
6 Somme de variables aléatoires 73
7 Théorème Central Limite 76
8 Exercices 77

CHAPITRE 1

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS.

1 Introduction

La théorie des probabilités est la théorie mathématique qui permet d'étudier et modéliser les phénomènes régis par l'aléa et l'incertitude. Elle constitue avec les statistiques les fondements des sciences du hasard et occupe aujourd'hui une place centrale dans la plupart des sciences. Tout d'abord, de par ses applications pratiques : en tant que base des statistiques, elle permet l'analyse des données recueillies lors d'une expérience, lors d'un sondage, etc., elle possède en outre de nombreuses applications directes, par exemple en fiabilité, ou dans les assurances et la finance. Elle permet la modélisation de nombreux phénomènes, aussi bien en sciences naturelles qu'en sciences humaines et dans d'autres disciplines (informatique, réseaux de communication, traitement du signal, etc.).

2 Quelques définitions

2.1 Expérience aléatoire ou épreuve

On appelle *expérience aléatoire* ou épreuve, notée E, toute expérience dont le résultat est régi par le hasard, lorsqu'on répète l'expérience dans les mêmes conditions.

Exemples

1. Le jet d'une pièce de monnaie et l'observation de la face supérieure est une expérience aléatoire qui conduit à deux résultats possibles : pile ou face.
2. La détermination du nombre de véhicules circulant sur une partie de l'autoroute en une période de temps donnée est une expérience aléatoire dont le résultat possible est un entier.

3. La mesure de la durée de vie d'une lampe est une expérience aléatoire dont le résultat est un réel.

2.2 Espace des épreuves

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire E est appelé l'espace des épreuves ou espace fondamental [(1)] et est noté Ω.

Exemple 2.1 .
Soit l'expérience qui consiste à jeter un dé et observer la face supérieure, alors $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exemple 2.2 .
Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une flèche sur une cible circulaire de rayon r qui est décomposée en 4 zones notées 1,2,3 et 4 respectivement. On suppose que la flèche atteint la cible, à chaque lancer.
L'espace Ω peut être défini de plusieurs manières différentes :

- si on s'intéressait juste à la zone du point d'impact, on aura $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$,
- si on s'intéressait à la distance entre le point d'impact et le centre de la cible alors $\Omega = \{x \mid x \in [0, r]\}$,
- si on s'intéressait aux coordonnées du point d'impact dans le plan qui a pour origine le centre de la cible, alors $\Omega = \{(x, y) \mid (x, y) \in [0, r] \times [0, r]\}$.

2.3 Événement, événement élémentaire, événement composé

On appelle événement tout ce qui peut se réaliser ou ne pas se réaliser, à la suite d'une expérience aléatoire.

- Un événement est dit *élémentaire*, s'il ne peut être réalisé que par un seul résultat de l'épreuve c'est un sous ensemble de Ω à un seul élément.
- Un événement est dit *composé*, s'il est réalisé par plusieurs éléments de Ω. C'est un sous ensemble de Ω à plusieurs éléments.

Exemple 2.3 .
On considère l'expérience "jeter un dé" et on s'intéresse à lire la face supérieure du dé.

- "Obtenir un six" est un événement élémentaire réalisé par $\{6\}$.
- "Obtenir un nombre pair" est un événement qui n'est pas élémentaire car il peut être réalisé par plusieurs résultats de l'épreuve à savoir $\{2, 4, 6\}$.
- "Obtenir un nombre entier compris entre 1 et 6" est un événement certain réalisé par Ω.
- "Obtenir un sept" est un événement impossible réalisé par $\emptyset$.

(1). Il existe dans la littérature, plusieurs autres termes pour désigner Ω : univers, espace des observables, espace échantillonal,espace des événements,etc.

2.4 Réalisation d'un événement.

On considère une expérience aléatoire E dont l'espace des épreuves est Ω. Soit A un événement lié à cette expérience et soit w l'issue de l'expérience.
Si $w \in A$ alors on dit que l'événement A est réalisé à travers w, sinon on dira que A n'est pas réalisé.

2.5 Relations et opérations sur les événements.

Relations. Soient A et B deux événements liés à une expérience aléatoires.

Inclusion : On dit que A est inclus dans B, si la réalisation de A entraîne nécessairement celle de B,

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow w \in A \Longrightarrow w \in B.$$

Égalité : A et B sont égaux si la réalisation de A entraîne la réalisation de B et la réalisation de B entraîne la réalisation de A,

$$A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A.$$

Complémentarité : On considère Ω l'espace des épreuves associée à une expérience aléatoire et soit A un événement lié à cette expérience. On appelle complémentaire de A noté $\mathrm{C}_\Omega(A)$ ou $\bar{A}$, l'événement réalisé si A ne l'est pas et vice versa,

$$w \in A \Longrightarrow w \notin \bar{A}.$$

Ω est dit l'événement *certain*, son complémentaire est l'ensemble $\emptyset$, appelé l'événement *impossible*.

Opérations sur les événements. Soient A et B deux événements.

Union : $A \cup B$ est l'événement réalisé lorsqu'au moins un des événements A ou B est réalisé,

$$w \in A \cup B \Longleftrightarrow w \in A \text{ ou } w \in B \text{ (ou non exclusif).}$$

Intersection : $A \cap B$ est l'événement réalisé lorsque les événements A et B sont réalisés simultanément,

$$w \in A \cap B \Longleftrightarrow w \in A \text{ et } w \in B.$$

Différence : $A - B$ est l'événement réalisé si A est réalisé et B ne l'est pas,

$$w \in A - B \Longleftrightarrow w \in A \text{ et } w \notin B.$$

Différence symétrique : L'événement $A \triangle B$ est réalisé si A est réalisé ou B est réalisé exclusivement,

$$w \in A \triangle B \Longleftrightarrow w \in A \text{ ou } w \in B \text{ (ou exclusif).}$$

2.6 Événements incompatibles

On dit que deux événements A et B sont *incompatibles* ou *disjoints*, si la réalisation de l'un exclut la réalisation de l'autre ou si l'événement intersection est l'événement impossible.

$$A, B \text{ sont incompatibles } \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

2.7 Système complet

Soit Ω l'espace des épreuves d'une expérience aléatoire E. Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$, des événements liés à cette expérience. On dit que $A_1, A_2, ...A_n$ forment un *système complet*, si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $A_i \neq \emptyset, \forall i = 1, 2, \cdots, n.$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j = 1, 2, \cdots, n$ et $i \neq j.$
3. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$

Exemple 2.4 .

On jette un dé, et on observe la face supérieure. Soient A, B, C les événements :

A : "Avoir un nombre pair".

B : " Avoir un nombre impair".

C : "Avoir un nombre premier".

- Déterminer Ω.
- Expliciter A, B, C.
- Déterminer $A \cap B$,$A \cap C$,$B \cap C$,$A \cap B \cap C$,$A - (B \cap C)$.
- Préciser les événements qui forment un système complet.

3 Notion de tribu

Définition 3.1. Soit Ω un ensemble quelconque, on appelle *tribu* ou σ-algèbre sur Ω, toute partie $T \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

- $\Omega \in T$,
- $A \in T \Longrightarrow \bar{A} \in T$ (stabilité par complémentarité),
- Si $\{A_i, i \in \mathbb{N}\}$ est une famille d'éléments de T alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in T$ (stabilité par union dénombrable).

3.1 Propriétés d'une tribu

Proposition 3.1 .
Soit T une tribu sur Ω. Alors on a :

- $\emptyset \in T$,
- *Pour toute suite (B_i), $(i \in \mathbb{N})$ d'éléments de T,* $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \in T$ *(stabilité par intersection dénombrable).*
- $\forall A, B \in T, A - B \in T$.
- $\forall A, B \in T, A \triangle B \in T$.

3.2 Espace probabilisable

On appelle espace probabilisable lié à l'expérience aléatoire E, le couple (Ω, T) où Ω est l'espace des épreuves de E et T la tribu des événements liés à E.

Remarque .
Si Ω est un ensemble fini ou infini dénombrable, la tribu des événements est nécessairement égale à $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier.

4 Notion de probabilité

Définition 4.1. On appelle probabilité sur (Ω, T), toute application notée P de (Ω, T) dans l'intervalle [0,1] telle que :

- $P(\Omega) = 1$,
- Quelle que soit une suite d'événements A_i , 2 à 2 **incompatibles**, on a :

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Cette condition est appelée *l'axiome de la σ-additivité*.

En définissant une probabilité P sur un espace probabilisable, on obtient un espace dit probabilisé (Ω, T, P) ou *espace de probabilité*.

4.1 Propriétés

Proposition 4.1 .
Soit (Ω, T, P) un espace de probabilité. Soient A, B, C trois événements quelconques de T. On a les propriétés suivantes :

- $P(\emptyset) = 0$.

— $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
— *Si* $A \subseteq B$ *alors* $P(A) \leq P(B)$.
— *Si* $A \subseteq B$ *alors* $P(B - A) = P(B) - P(A)$.
— *Si* $A \nsubseteq B$ *alors* $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$.
— $P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$.
— $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

5 Caractérisation des probabilités dans le cas d'événements équiprobables.

Soit (Ω, T, P) un espace de probabilité fini avec $\Omega = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$. Remarquons que les événements élémentaires $\{w_i\}$ forment un système complet de Ω.
En supposant que tous les w_i ont la même probabilité de se réaliser (dans ce cas, on dit qu'ils sont équiprobables), alors on a :

$$P(\Omega) = P(\bigcup_{i=1}^{n} \{w_i\}) = \sum_{i=1}^{n} P(\{w_i\}) = 1 \Longrightarrow nP(\{w_i\}) = 1 \Longrightarrow P(\{w_i\}) = \frac{1}{n}.$$

Si A est un événement quelconque composé de k événements élémentaires, alors $A = \bigcup_{i=1}^{k} \{w_i\}$. Donc

$$P(A) = P(\bigcup_{i=1}^{k} \{w_i\}) = \sum_{i=1}^{k} P(\{w_i\}) = \frac{k}{n}.$$

d'où

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Ce résultat est la définition classique de la probabilité.

Exemples .

— Lorsqu'on jette un dé, la probabilité d'avoir un 6 est égale à $\frac{1}{6}$, celle d'avoir un nombre impair est égale à $\frac{1}{2}$.
— Lorsqu'on tire une carte au hasard, d'un jeu de 52 cartes, la probabilité de tirer un roi est de $\frac{4}{52}$, celle d'avoir un trèfle est de $\frac{13}{52}$.
— On extrait d'une caisse contenant 20 pièces dont 4 sont défectueuses, 3 pièces au hasard. Soient A, B, C les événements :
A : "Avoir 3 bonnes pièces".
B : "Avoir 2 bonnes pièces et une défectueuse".
C : " Avoir au plus 2 bonnes pièces".

Les probabilités de ces événements sont : $P(A) = \frac{C_{16}^3}{C_{20}^3}$, $P(B) = \frac{C_{16}^2 \times C_4^1}{C_{20}^3}$, $P(C) = 1 - P(A)$.

6 Probabilités conditionnelles

6.1 Introduction

La notion de probabilité conditionnelle est la plus importante mais aussi la plus délicate dans toute la théorie des probabilités, elle s'introduit en particulier à chaque fois que pendant le déroulement d'une expérience aléatoire, une nouvelle information apparaît et influe sur la réalisation ou non des autres événements.

Définition 6.1. Soit (Ω, T, P) un espace de probabilité. On considère deux événements A et B de T tel que $P(B) \neq 0$.

On appelle alors probabilité de l'événement "A si B" ou A/B , *la probabilité conditionnelle de A relative à B* , ou probabilité de A sachant B, donnée par :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1.1}$$

On a donc $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)$.

On dit alors que les événements A et B sont liés ou dépendants.

6.2 Formule des probabilités composées

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements d'un espace de probabilité vérifiant $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_2 \cap A_1) \cdots P(A_n/(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)). \tag{1.2}$$

Cette formule qui peut être démontrée par récurrence sur n, est appelée *formule des probabilités composées.*

Exemples .

— On choisit au hasard, une famille parmi les familles ayant 3 enfants. Sachant que cette famille a des enfants des 2 sexes, quelle est la probabilité qu'elle ait 2 garçons ?

On peut expliciter l'espace des épreuves :

$\Omega = \{FFF, FFG, FGF, FGG, GFG, GFF, GGF, GGG\}\}$ et $|\Omega| = 8$ (F=fille,G=garçon).

Soient les événements :

A :" la famille a deux garçons". B :"la famille a des enfants des deux sexes".

On cherche alors $P(A/B)$.

On a $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, avec
$A \cap B = \{GGF, FGG, GFG\}$ donc $|A \cap B| = 3$ et $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$.
$B = \{FFG, FGF, FGG, GFG, GFF, GGF\}$ donc $|B| = 6$ et $P(B) = \dfrac{6}{8}$.
D'où $P(A/B) = \dfrac{1}{2}$.

— Soit l'expérience aléatoire qui consiste à tirer 2 fois consécutives une carte de jeu sans la remettre.
On s'intéresse à calculer la probabilité d'avoir un as au premier tirage et un roi au deuxième tirage. Pour cela on décrit les événements :
A :" Avoir un as au premier tirage".
B :" Avoir un roi au deuxième tirage".
B/A :" Avoir un roi au deuxième tirage sachant qu'on a un as au premier tirage".
On a $P(A) = \dfrac{C_4^1}{C_{52}^1} = \dfrac{4}{52}$ et $P(B/A) = \dfrac{C_4^1}{C_{51}^1} = \dfrac{4}{51}$. D'où $P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = \dfrac{4}{663}$.

6.3 Formule des probabilités totales

Soit (Ω, T, P) un espace de probabilité. Soit un système complet $\{A_1, A_2, ...A_n\}$ de Ω et A un événement quelconque de T.
L'événement A peut alors s'écrire :
$A = A \cap \Omega = A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i)$.
Or, d'après la définition d'un système complet, les A_i sont 2 à 2 incompatibles, donc $A \cap A_i$ sont aussi incompatibles, et on a :

$$P(A) = P(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i). \tag{1.3}$$

Or d'après 1.1 on a : $P(A \cap A_i) = P(A/A_i).P(A_i)$. En remplaçant dans 1.3, on obtient

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A/A_i).$$

qui est appelée *formule des probabilités totales*.

Exemple 6.1 .
Trois machines A_1, A_2 et A_3 produisent respectivement 30%,45% et 25% des pièces de la production. Le pourcentage de pièces défectueuses est 2% pour la machine A_1, 3% pour la machine A_2 et 1% pour la machine A_3.
Quelle est la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse ?

On considère les événements suivants :
A_i : "La pièce tirée provient de la machine A_i ", $i = 1..3$.
D : "la pièce est défectueuse".
Puisque chaque pièce quelconque ne peut provenir que d'une seule machine parmi trois, alors les événements A_i forment un système complet de l'espace Ω, ensemble de toutes les pièces produites.
L'événement D peut alors s'exprimer comme suit : $D = \bigcup_{i=1}^{3}(D \cap A_i)$.
Donc d'après la formule des probabilités totale on a :

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(D/A_i) = P(D/A_1)P(A_1) + P(D/A_2)P(A_2) + P(D/A_3)P(A_3) = 0.02.$$

6.4 Formule de Bayes

On considère un système complet d'événements A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, relatif à un événement A et on suppose que cet événement s'est réalisé. On se propose de chercher la probabilité que A soit réalisé à travers A_k, pour k fixé. Autrement dit, on cherche à calculer la probabilité de A_k sachant A : $P(A_k/A)$.
Par définition on a :

$$P(A_k/A) = \frac{P(A_k \cap A)}{P(A)} \tag{1.4}$$

Or $P(A_k \cap A) = P(A \cap A_k) = P(A/A_k)P(A_k)$ et $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A/A_i)$.
En remplaçant chaque terme de 1.4 par ce qu'il vaut, on obtient la fameuse *formule de Bayes* donnée par :

$$P(A_k/A) = \frac{P(A/A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A/A_i)}.$$

Application
Dans l'exemple précédent, la probabilité que la pièce défectueuse provienne de la machine A_2 est donnée par

$$P(A_2/D) = \frac{P(D/A_2)P(A_2)}{P(D)} = \frac{0.03 \times 0.45}{0.02}.$$

6.5 Événements indépendants

6.5.1 Indépendance de deux événements

Définition 6.2. Soit A et B deux événements d'un espace de probabilité (Ω, T, P) tels que $P(A) > 0$, $P(B) > 0$.

On dit que A est *indépendant* de B, si $P(A/B) = P(A)$.
Ce qui signifie que le fait de savoir que l'événement B s'est réalisé, n'influe pas sur la probabilité de la réalisation de l'événement A. Une conséquence importante de cette définition est le théorème suivant :

Théorème 6.1 .
Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \tag{1.5}$$

Remarque .
La relation donnée par l'équation 1.5 est très souvent utilisée pour vérifier l'indépendance de deux événements.

Exemple 6.2 .
Dans une famille ayant 3 enfants, choisie au hasard, étudions l'indépendance des événements :
A : "le 1^{er} enfant est une fille".
B :" le $3^{ème}$ enfant est un garçon".
On a :
$A = \{FFF, FFG, FGF, FGG\}$. $B = \{FFG, FGG, GFG, GGG\}$.
$A \cap B = \{FFG, FGG\}$.
Donc $P(A \cap B) = \frac{2}{8}$ et $P(A).P(B) = \frac{4}{8} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{4}$.
D'où les événements A et B sont indépendants.

6.5.2 Indépendance de plusieurs événements

Définition 6.3. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n événements d'un espace de probabilité, On dira que les événements A_i sont mutuellement indépendants si et seulement si

$$P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i), \forall I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Exemple 6.3 .
On jette deux dés, bien équilibrés et on veut étudier l'indépendance des trois événements :
A : "Avoir un nombre impair sur le premier dé".
B : "Avoir un nombre impair sur le 2ème dé".
C : " Avoir un total impair".
L'espace des épreuves peut être représenté par $\Omega = \{(x, y)$ tel que $x, y \in [\![1, 6]\!]\}$. d'où $|\Omega| = 36$. On a alors :
$|A| = 18$, $|B| = 18$ et $|C| = 18$.

On peut aussi facilement voir que :$|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 9$ et $|A \cap B \cap C| = 0$. Donc
$P(A \cap B) = \frac{9}{36} = P(A).P(B)$,
$P(A \cap C) = \frac{9}{36} = P(A).P(C)$,
$P(B \cap C) = \frac{9}{36} = P(B).P(C)$,
alors que $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$.
Donc les événements A, B, C sont indépendants deux à deux mais ne sont pas les trois mutuellement indépendants.

7 Application : Fiabilité d'un système

Une application intéressante du calcul de probabilité est la fiabilité d'un circuit ou d'un système.
Définition 7.1. Soit un système quelconque S (circuit électrique, réseau de neurones, chaîne de montage, etc.) représenté par un diagramme et formé de composants qui ont chacun une probabilité de fonctionner. On définit la fiabilité du système, notée $F(S)$, comme étant la probabilité que le système ne tombe pas en panne et qu'il reste opérationnel.
Deux structures particulières peuvent se présenter : des composants en série ou en parallèle.
Définition 7.2. Deux composants A et B sont dits en série lorsqu'ils sont sur la même branche et qu'on doit les parcourir tous les deux afin d'aller du début à la fin de cette branche (Figure 1.1).
Lorsque les composants A et B sont en série, la fiabilité du système dépend du bon fonctionnement des deux composants en même temps. Par conséquent on a

$$F(S) = P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B).$$

Si les composants en série sont indépendants alors la fiabilité du système est donnée par

$$F(S) = P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

(En utilisant la définition de l'indépendance donnée par l'équation 1.5)

FIGURE 1.1 – Composants en série.

Définition 7.3. Deux composants A et B sont dits en parallèle lorsqu'ils sont sur deux branches différentes et que pour aller du début à la fin, on doit passer par A ou par B (Figure 1.2).
Lorsque les composants A et B sont en parallèle, le système fonctionne si au moins l'un des deux

composants fonctionne. Par conséquent on a

$$F(S) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si les composants A et B en parallèle sont indépendants alors la fiabilité du système est donnée par

$$F(S) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

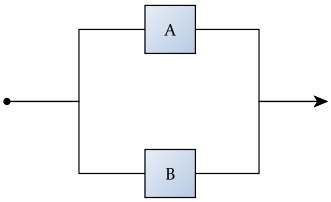
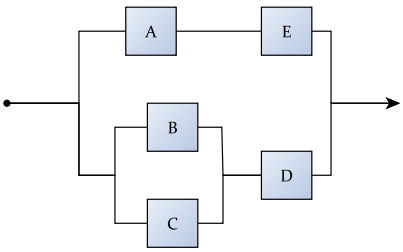


FIGURE 1.2 – Composants en parallèle.

Exemple 7.1 .
Soit un circuit S avec les composants indépendants A, B, C, D et E suivant :



Calculer la fiabilité du circuit S si les probabilités de bon fonctionnement des composants sont $P(A) = 0.80, P(B) = P(C) = 0.88$ et $P(D) = P(E) = 0.78$.
On doit décomposer notre système en sous-composants en série ou en parallèle. On peut d'abord calculer la fiabilité du sous-système, qu'on va noter S_1 formé par B et C comme suit :

$$P(S_1) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B)P(C) = 0.88 + 0.88 - 0.88 \times 0.88 = 0.9856.$$

On peut par la suite considérer le sous-système S_2 composé de S_1 et D :

$$P(S_2) = P(S_1 \cap D) = P(S_1) \times P(D) = 0.9856 \times 0.78 = 0.7688.$$

Considérons maintenant le sous-système en série composé de A et E. On a

$$P(S_3) = P(A \cap E) = P(A) \times P(E) = 0.88 \times 0.78 = 0.6240.$$

Enfin, on obtient la fiabilité de notre système S en calculant $P(S_2 \cup S_3)$:

$$F = P(S_2 \cup S_3) = P(S_2) + P(S_3) - P(S_2) \times P(S_3) = 0.9131.$$

Ce système a donc une fiabilité de 91.31%.

8 Exercices

Exercice 1. Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, déterminer l'espace des épreuves Ω correspondant.

a) 3 jets consécutifs d'une pièce de monnaie,

b) n jets consécutifs d'une pièce de monnaie,

c) tirage d'une carte d'un jeu de 52 cartes,

d) observation du nombre de personnes entrant au bureau de poste entre 9h.00 et 16h.00.

Exercice 2. On jette simultanément une pièce de monnaie et un dé. Décrire l'espace des épreuves Ω et en déduire sa cardinalité.
A est l'événement "obtenir pile", B est l'événement "obtenir un nombre inférieur ou égal à 3".

- Décrire $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
- Expliciter A,B, $A - B$.

Exercice 3. Soit (Ω, T) un espace probabilisable. Soient A, B, C trois événements quelconques de T. En utilisant les opérations sur les événements $(\cup, \cap, -)$, représenter les événements suivants :

- E_1 : Au moins un des événements A, B, C se réalise.
- E_2 : Les événements A, B, C se réalisent simultanément.
- E_3 : Exactement un des événements A, B, C se réalise.
- E_4 : Aucun des événements A, B, C ne se réalisent.
- E_5 : Au plus un des événements A, B, C se réalise.
- E_6 : Exactement deux des événements A, B, C se réalisent.

Exercice 4. Soit $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$. On considère les familles de parties de Ω :

- $T_1 = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b, c, d, e\}\}$.

— $T_2 = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}\}$.
— $T_3 = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}\}$.

Vérifier que T_1 et T_2 sont des tribus et que T_3 ne l'est pas.

Exercice 5. Est-il possible de définir une probabilité P sur un espace (Ω, T) telle que :

1. $P(A) = 0.1, P(B) = 0.6$ et $P(A \cap B) = 0.2$.
2. $P(A) = 0.6, P(B) = 0.8$ et $P(A \cap B) = 0.1$.

A et B sont des événements quelconques de T.

Exercice 6. Soit (Ω, T, P) un espace de probabilité et soient A, B deux événements de T, tels que $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{2}{5}$ et $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$. Calculer la probabilité que

— au moins un des deux événements se réalise,
— l'événement A se réalise ou B ne se réalise pas,
— l'événement A se réalise et B ne se réalise pas,
— exactement l'un des deux événements se réalise.

Exercice 7. On admettra que la probabilité de naissance d'une fille est p et celle d'un garçon $1 - p$. Quelle est la probabilité pour qu'une famille de trois enfants ait trois enfants de même sexe ?

Exercice 8. *U*ne urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires. On tire 2 boules de cette urne. Quelle est la probabilité de tirer :

— Deux boules de même couleur,
— Deux boules de couleurs différentes.

Exercice 9. Dans une entreprise de construction, parmi un effectif de 80 ouvriers, 15 sont maçons-carreleurs, 23 sont maçons seulement, 7 sont carreleurs seulement, 5 sont plâtriers seulement et 2 sont des maçons-plâtriers et il n y a pas de plâtriers-carreleurs . Quelle est la probabilité qu'un ouvrier de cette entreprise soit maçon ou plâtrier ou carreleur ?

Exercice 10. Lors des soldes de fin d'année, un fabricant de chemises met en vente 200 chemises identiques. Néanmoins, il y a parmi ces chemises celles avec un ou 2 défauts ainsi que 100 chemises parfaites. Ces défauts mineurs ne sont pas visibles à la présentation.

(a) Quels doivent être les nombres de chemises de chaque catégorie, si l'on veut que le premier client qui prend au hasard une de ces chemises, ait 20% de chances d'avoir une chemise avec un défaut ?
(b) Le client s'aperçoit du défaut, il remet la chemise sans prendre soin de l'écarter, Quelle est la probabilité qu'il a, de prendre une chemise avec 2 défauts.

Exercice 11. Un constructeur aéronautique équipe ses avions trimoteurs d'un moteur central de type A et de deux moteurs, chacun par aile, de type B.
Chaque moteur tombe en panne indépendamment des autres , et on estime à $p_1 = 0.1$, la probabilité pour un moteur de type A de tomber en panne et à $p_2 = 0.2$, la probabilité pour un moteur de type B de tomber en panne. Le trimoteur peut voler si le moteur central *ou* les deux moteurs d'ailes fonctionnent.

— Quelle est la probabilité pour l'avion de voler ?

Exercice 12. Parmi 1000 moteurs d'une certaine fabrication, 725 moteurs ont fonctionné sans problème pendant les 3 premières années et 375 les 5 premières années. Quelle est la probabilité qu'un moteur qui a fonctionné sans problèmes pendant les 3 premières années, fonctionne encore pendant 2 ans ?

Exercice 13. Une urne contient 3 boules rouges et 7 noires. Les joueurs A et B tirent sans remise, une boule à tour de rôle, et le premier qui tire une boule rouge est le gagnant. Le joueur A commence, quelle est la probabilité qu'il gagne ce jeu ?

Exercice 14. Trois usines A, B, C produisent respectivement 50%, 30%, et 20% des moteurs de voitures. Parmi la production de chacune de ces usines, 5%, 3% et 2% des moteurs fabriqués sont défectueux. Calculer la probabilité pour qu'un moteur défectueux provienne de l'usine A.

Exercice 15. Un test médical effectué sur les élèves d'un lycée a permis de découvrir 2% de daltoniens chez les garçons et 3% chez les filles. Le lycée étant composé de 40% de filles, calculer la probabilité

(a) qu'un élève choisi au hasard soit daltonien,

(b) que l'élève soit un garçon sachant qu'il est daltonien.

Exercice 16. Pour entretenir en bon état de fonctionnement ses installations de chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été. On sait que 20% des chaudières sont sous garantie.
Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de 1% . Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de 10%.
On appelle G l'événement : "la chaudière est sous garantie" ;
On appelle D l'événement : "la chaudière est défectueuse".

1. Calculer la probabilité des événements suivants :
   — A : "la chaudière est sous garantie et est défectueuse" ;
   — B : "la chaudière est défectueuse".
2. Dans un logement la chaudière est défectueuse. Montrer que la probabilité qu'elle soit sous garantie est de $\frac{1}{41}$.

Exercice 17. Une école prestigieuse exige de ces candidats de passer un test avant d'accepter leurs candidature. Un bon candidat a 85% de chance de réussir le test alors qu'un candidat faible n'a que 15% de chance de réussir le test. Des études statistiques ont montré qu'il y a en moyenne 40% de bon candidats.

1. Quelle est la probabilité qu'un candidat choisi au hasard, réussi le test.
2. Un candidat a échoué au test, quelle est la probabilité qu'il soit bon.
3. Quelle est la proportion des bons candidats qui ont réussi au test.

Exercice 18. La probabilité qu'un autobus parte à temps est 0.85, la probabilité qu'il parte à temps et arrive à temps est 0.75 et la probabilité qu'il arrive à temps est 0.78. Quelle est la probabilité

1. que l'autobus arrive à temps s'il part à temps ?
2. que l'autobus ne parte pas à temps et arrive à temps ?

Exercice 19. Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de clés USB. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :
— 60% des boîtes abîmées contiennent au moins une clé défectueuse.
— 98% des boîtes non abîmées ne contiennent aucune clé défectueuse.
On désigne par A l'événement : "la boîte est abîmée" et par D l'événement "la boîte achetée contient au moins une clé défectueuse".

1. Quelle est la probabilité qu'un client achète une boîte qui contient au moins une clé défectueuse ?
2. Le client constate qu'une des clés achetées est défectueuse. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boîte abîmée ?

Exercice 20. On transmet un message composé de n symboles binaires 0 ou 1. Lors de la transmission, chaque symbole est perturbé avec la probabilité p et se transforme alors en symbole opposé. Par précaution, le message est transmis deux fois. Si les deux messages transmis coïncident, l'information est considérée comme correcte.

1. Avec quelle probabilité le $i^{ème}$ symbole du premier message transmis est-il identique au $i^{ème}$ symbole du deuxième message transmis ?
2. Avec quelle probabilité les deux messages transmis sont-ils identiques ?
3. Trouver la probabilité pour que, malgré la coïncidence des deux messages, l'information s'avére erronée. (Application numérique : $n = 100, p = 0.001$).

Exercice 21. On met au point un algorithme qui lance une requête sur un des trois moteurs de recherche M_1, M_2 et M_3. L'algorithme choisit aléatoirement d'utiliser M_1 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$, M_2 (resp. M_3) avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$.
La précision de ces moteurs de recherche est évaluée en fonction de la pertinence des réponses qu'ils retournent, et de manière probabiliste, M_1 renvoie une réponse pertinente 3 fois sur 4, M_2 1 fois sur 4 et M_3 3 fois sur 4.

1. Avec quelle probabilité, l'algorithme retourne t-il une réponse pertinente ?
2. Calculer la probabilité qu'une réponse soit pertinente et fournie par le moteur de recherche M_1
3. Quelle est la probabilité qu'une réponse non pertinente soit fournie par le moteur M_3 ?

Exercice 22. On jette deux dés dont les faces sont équiprobables. étudier l'indépendance des événements suivants :
A : " le nombre de points amenés par le premier dé est pair".
B : " la somme de points est paire".
C : " la somme des points est divisible par 4".

Exercice 23. Soient A, B deux évènements de (Ω, T, P). Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

— Les événements A et A sont indépendants.
— Les événements A et B sont indépendants.
— Les événements A et B sont indépendants.
— Les événements A et B sont indépendants.

Exercice 24. Soit $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ un système complet d'événements de l'espace des épreuves Ω. On suppose que les événements $A_i, i = 1..4$, sont équiprobables et on pose : $A = A_1 \cup A_2, B = A_3 \cup A_2, C = A_4 \cup A_2$.

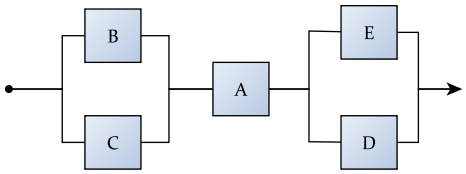
— étudier l'indépendance des événements A, B et C.

Exercice 25. Soit A et B deux événements tels que $P(A) = p$,$P(B) = 0.4$ et $P(A \cup B) = 0.8$.

— Quelle est la valeur de p si A et B sont incompatibles ?

— Quelle est la valeur de p si A et B sont indépendants ?

Exercice 26. Considérons le système suivant pour lequel chacun des composants fonctionne de façon indépendante des autres composants.



Calculer la fiabilité du circuit si les probabilités de bon fonctionnement sont $P(A) = 0.80, P(B) = 0.75, P(C) = 0.95, P(D) = 0.78$ et $P(E) = 0.85$.

Exercice 27. Deux composants sont disposés en parallèle (les composants ne sont pas nécessairement indépendants). La fiabilité du composant 1 est de 90%, celle du composant 2 est de 82%, celle du système est de 99%. Quelle est la probabilité que

(a) les deux composants soient opérationnels ?

(b) le composant 1 ne fonctionne pas et le composant 2 fonctionne ?

(c) le composant 2 fonctionne sachant que le composant 1 ne fonctionne pas ?

(d) les deux composants fonctionnent-ils de façon indépendante.

CHAPITRE 2

VARIABLE ALÉATOIRE

1 Exemple introductif

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à jeter une pièce de monnaie 3 fois de suite. L'espace fondamental Ω est donné par $\Omega = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFP, PFF, PPF, PPP\}$.
On suppose qu'on s'intéresse au nombre de piles obtenus. On peut alors associer à chaque élément de Ω un nombre désignant le nombre de piles.
On définit ainsi une application qu'on note X de Ω dans l'ensemble des nombres $\{0, 1, 2, 3\}$, et on peut calculer la probabilité de chacun de ces nombres en évaluant la probabilité des événements A_x : "Avoir exactement x piles, $x = 0, 1, 2, 3$.
Donc

- $P(A_0) = P(X = x = 0) = P(FFF) = \frac{1}{8}$.
- $P(A_1) = P(X = x = 1) = P(PFF, FPF, FFP) = \frac{3}{8}$.
- $P(A_2) = P(X = x = 2) = P(PPF, PFP; FPP) = \frac{3}{8}$.
- $P(A_3) = P(X = x = 3) = P(PPP) = \frac{1}{8}$.

On a pu donc associer à chacun des résultats de l'application une probabilité. On dira dans ce cas , que l'application X est une *variable aléatoire* définie sur l'espace fondamental Ω à valeurs dans l'ensemble $D = \{0, 1, 2, 3\}$.

2 Variable aléatoire

Définition 2.1. Soit(Ω, T, P) un espace de probabilité. On appelle *variable aléatoire réelle*, toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété suivante :

Pour tout nombre réel a ; $A_a = X^{-1}(]-\infty, a]) = \{w \in \Omega \mid X(w) \leq a\} \in T$.
Autrement dit, l'ensemble A_a doit être un événement ayant une probabilité.

Exemples .

1. Soit (Ω, T, P) un espace de probabilité avec $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$ et $T = \mathcal{P}(\Omega)$.
   On considère l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
   $X(w_1) = X(w_2) = 0$, $X(w_3) = 1$, $X(w_4) = X(w_5) = X(w_6) = -1$.
   L'application X définit bien une variable aléatoire sur (Ω, T) car :
   Si $a < -1$, $A_a = \{w \in \Omega \mid X(w) \leq a\} = \emptyset \in T$.
   Si $-1 \leq a < 0$, $A_a = \{w \in \Omega \mid X(w) = -1\} = \{w_4, w_5, w_6\} \in T$.
   Si $0 \leq a < 1$, $A_a = \{w \in \Omega \mid X(w) = -1$ ou $X(w) = 0\} = \{w_4, w_5, w_6, w_1, w_2\} \in T$.
   Si $1 \leq a$, $A_a = \{w \in \Omega \mid X(w) = 0$ ou $X(w) = -1$ ou $X(w) = 1\} = \Omega \in T$.
   Donc $\forall a \in \mathbb{R}, A_a \in T$. D'où X est bien une variable aléatoire.
2. On considère $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ et $T = \{\emptyset, \Omega, \{w_1\}, \{w_2, w_3, w_4\}\}$.
   On considère l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $X(w_1) = 0$, $X(w_2) = 1$, $X(w_3) = X(w_4) = 2$.
   Montrer que X n'est pas une variable aléatoire.

2.1 Support d'une v.a.r ou domaine de définition

L'étude de chaque v.a.r X commence par la détermination et la description de l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X. cet ensemble est appelé *support* de la v.a.r X.

Exemples .

— Dans l'exemple précédent on a $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.
— On lance deux dés, et on appelle X la v.a.r égale à la somme des points obtenus, dans ce cas on aura $X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
— On lance deux dés, et on définit X la v.a.r qui donne le plus grand des points obtenus, dans ce cas $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2.2 Fonction de répartition

Définition 2.2. Soit X un v.a.r définie sur un espace de probabilité (Ω, T, P). On appelle *fonction de répartition* de X, la fonction numérique qu'on note F_X définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(x) = P(X \leq x)$.

2.2.1 Propriétés de la fonction de répartition

Théorème 2.1 .
Soit X une variable aléatoire réelle et soit F_X sa fonction de répartition. Alors F_X possède les

propriétés suivantes :

i) F_X *est une fonction croissante.*

ii) F_X *est continue à droite en tout point de* $\mathbb{R}$.

iii) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

Proposition 2.1 .
Soit X *une v.a.r et soit* F_X *sa fonction de répartition. On a :*

i) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$, $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

ii) $\forall a \in \mathbb{R}, P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$. *Avec* $F_X(a^-) = P(X < a)$.

Preuve.

i) l'événement $(a < X \leq b)$ peut s'écrire $(X \leq b) - (X \leq a)$ et on a de plus $(X \leq a) \subseteq (X \leq b)$. Or d'après les propriétés des probabilités (Proposition 4.1), on a :
$P(a < X \leq b) = P[(X \leq b) - (X \leq a)] = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$.

ii) On a l'événement $(X \leq a) = (X < a) \cup (X = a)$ et cette union est disjointe. Donc on a :
$P(X \leq a) = P[(X < a) \cup (X = a)] = P(X < a) + P(X = a)$, donc $P(X = a) = P(X \leq a) - P(X < a) = F_X(a) - F_X(a^-)$.

□

2.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 2.3. Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace de probabilité (Ω, T, P). On appelle *loi de probabilité* de la variable X, la donnée de probabilités de X en tout point de $\mathbb{R}$.

Exemple récapitulatif

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à jeter 2 dés. Soit X la v.a.r qui désigne le nombre total de points obtenus. On sait que $\Omega = \{(i, j) \mid i = 1..6, j = 1..6\}$ et $|\Omega| = 36$.
Donc $X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. On peut ainsi déterminer la loi de probabilité de X en calculant la probabilité de chaque résultat possible, comme suit :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

On peut alors écrire :

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{36} & \text{si } x\in\{2,12\}\\ \frac{2}{36} & \text{si } x\in\{3,11\}\\ \frac{3}{36} & \text{si } x\in\{4,10\}\\ \frac{4}{36} & \text{si } x\in\{5,9\}\\ \frac{5}{36} & \text{si } x\in\{6,8\}\\ \frac{6}{36} & \text{si } x\in\{7\}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Maintenant pour la fonction de répartition de X, on a : $F_X(x)=P(X\leq x)$ pour toute les valeurs de x. Donc :

- Si $x<2$, $F_X(x)=P(X\leq x)=0$.
- Si $2\leq x<3$, $F_X(x)=P(X=2)=\frac{1}{36}$.
- Si $3\leq x<4$, $F_X(x)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{3}{36}$.
- Si $4\leq x<5$, $F_X(x)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=\frac{6}{36}$.
- Si $5\leq x<6$, $F_X(x)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=\frac{10}{36}$.
- Si $6\leq x<7$, $F_X(x)=\sum_{i=2}^{6}P(X=i)=\frac{15}{36}$.
- Si $7\leq x<8$, $F_X(x)=\sum_{i=2}^{7}P(X=i)=\frac{21}{36}$.
- Si $8\leq x<9$, $F_X(x)=\sum_{i=2}^{8}P(X=i)=\frac{26}{36}$.
- Si $9\leq x<10$, $F_X(x)=\sum_{i=2}^{9}P(X=i)=\frac{30}{36}$.
- Si $10\leq x<11$, $F_X(x)=\sum_{i=2}^{1}0P(X=i)=\frac{33}{36}$.
- Si $11\leq x<12$, $F_X(x)=\sum_{i=2}^{1}1P(X=i)=\frac{35}{36}$.
- Si $x\geq 12$, $F_X(x)=\sum_{i=2}^{1}2P(X=i)=\frac{36}{36}=1$.

On se propose maintenant d'étudier deux types de v.a.r. selon leur support. On distingue ainsi les v.a.r. discrètes et les v.a.r. absolument continues.

3 Variable aléatoire discrète

Définition 3.1. Une variable aléatoire réelle X est dite *variable aléatoire discrète*, si son support $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable, il sera dans ce cas noté D.

Exemples .

- Si X désigne la valeur indiquée sur la face supérieure d'un dé à 6 faces, X est une variable aléatoire discrète de support $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Si X désigne le nombre de jets d'un dé qui sont nécessaires pour obtenir la face 4 pour la première fois, alors X est une variable aléatoire discrète qui prend ses valeurs dans $D = \mathbb{N}^*$.
- Si X désigne le nombre de personnes entrant à la poste entre 15h.00 et 17h.00, X est alors une variable discrète qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

3.1 Propriétés de la fonction de répartition d'une v.a.r discrète

Soit X une v.a.r de support $D = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_j, \ldots\}$.
On peut remarquer que la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète $F_X(x)$ est une fonction en escalier présentant des sauts aux points $x = x_i$, et que dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}[$ la fonction $F_X(x)$ est constante (Figure 2.1).
En particulier, si X prend un nombre fini de valeurs $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, alors :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ P(x_1) & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ P(x_1) + P(x_2) & \text{si } x_2 \leq x < x_3 \\ P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) & \text{si } x_3 \leq x < x_4 \\ \vdots & \\ \sum_{k=1}^{i} P(x_k) & \text{si } x_i \leq x < x_{i+1} \\ \vdots & \\ \sum_{k=1}^{n-1} P(x_k) & \text{si } x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$

3.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une v.a.r discrète de support $D = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots$.
On peut définir la donnée de probabilité $P(X = x_i) = p(x_i)$ ou fonction de masse de X, soit à partir de la définition de la v.a.r. X, soit en utilisant la fonction de répartition, car on sait que $P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_i^-)$ (voir Proposition 2.1).
Mais puisque X est une v.a.r discrète, $F_X(x_i^-) = P(X < x_i) = P(X \leq x_{i-1})$.

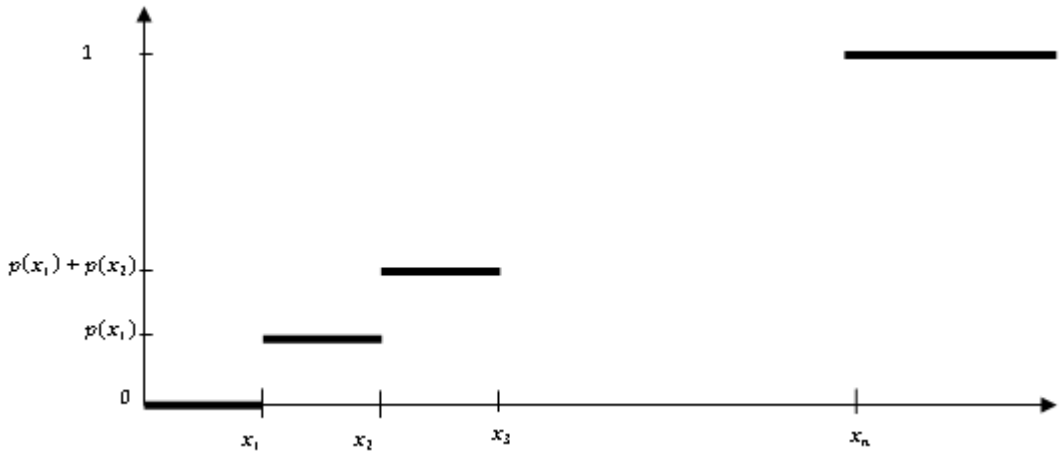


FIGURE 2.1 – Représentation graphique de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète de support fini.

Par conséquent

$$p(x_i) = P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}).$$

Remarque .
Si $p(x)$ est la fonction de masse de la v.a.r discrète X alors $\sum_{x \in D} p(x) = 1$.

3.3 Probabilité attachée à un intervalle

Soit X une v.a.r discrète de loi de probabilité $p(x) = P(X = x)$ et de fonction de répartition $F_X(x) = P(X \leq x)$ et notons par $P(]a, b])$ la probabilité de l'événement $(a < X \leq b)$. On peut alors en déduire les propriétés suivantes :

- $P(]a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$.
- $P([a, b[) = F_X(b) - F_X(a) + p(a) - p(b)$.
- $P(]a, b[) = F_X(b) - F_X(a) - p(b)$.
- $P([a, b]) = F_X(b) - F_X(a) + p(a)$.
- $P(]b, +\infty[) = 1 - F_X(b)$.
- $P([b, +\infty) = 1 - F_X(b) + p(b)$.

3.4 Moments d'une variable aléatoire discrète

3.4.1 Espérance mathématique

Définition 3.2. Soit X une v.a.r discrète de support $D = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots\}$ ayant une fonction de masse $p(x)$. On dit que X possède une *espérance*, si la série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$ est absolument convergente (i.e. la série $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p(x_i)$ est convergente). On appelle alors Espérance de X, le nombre $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i).$$

Exemples

1. On considère le jeu qui consiste à jeter un dé bien équilibré. On gagne 2 points si le dé amène les faces 1,3, 5. On perd 5 points si le dé amène les faces 4 ou 5, et le jeu est nul si la face 2 apparaît. On considère X la variable aléatoire qui désigne le gain d'un jet quelconque, on aura $D = \{-5, 0, 2\}$ et

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2}{6} & \text{si } x = -5 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 0 \\ \frac{3}{6} & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Donc l'espérance mathématique de X est égale à

$$E(X) = \sum_{x \in D} x p(x) = -5 \times \frac{2}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{3}{6} = \frac{2}{3}.$$

2. Soit X la variable aléatoire de support $\mathbb{N}^*$ et de fonction de masse

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{\pi^2 x^2} & \text{si } x \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   L'espérance de X n'existe pas car

$$E(X) = \sum_{x=1}^{+\infty} x \frac{6}{\pi^2 x^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x}$$

   qui est une série divergente.

3.4.2 Variance d'une v.a.r discrète

Définition 3.3. Soit X une v.a.r discrète de support D et ayant une fonction de masse $p(x)$ et une espérance $E(X)$. Alors on appelle *variance* de X le nombre $V(X) \in \mathbb{R}^+$ -s'il existe- défini par :

$$V(X) = \sum_{x \in D} (x - E(X))^2 p(x).$$

Si X admet une variance, on appelle alors *écart-type* de X le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Théorème 3.1 Théorème de Koenig-Huyghens.
Soit X une v.a.r discrète ayant une variance et soit a un nombre réel quelconque. On a :

$$E((X-a)^2) = V(X) + (E(X) - a)^2.$$

En particulier si $a = 0$, on a : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
E((X-a)^2) &= \sum_{x \in D} (x-a)^2 p(x) \\
&= \sum_{x \in D} (x^2 - 2ax + a^2) p(x) \\
&= \sum_{x \in D} x^2 p(x) - 2a \sum_{x \in D} x p(x) + a^2 \sum_{x \in D} p(x) \\
&= \sum_{x \in D} x^2 p(x) - 2a \sum_{x \in D} x p(x) + a^2 \sum_{x \in D} p(x) + 2[E(X)]^2 - 2[E(X)]^2 \\
&= \sum_{x \in D} x^2 p(x) - 2E(X) \sum_{x \in D} x p(x) + [E(X)]^2 + [E(X)]^2 - 2aE(X) + a^2 \\
&= \left[\sum_{x \in D} x^2 p(x) - \sum_{x \in D} 2xE(X) p(x) + [E(X)]^2 \sum_{x \in D} p(x) \right] + \left[[E(X)]^2 - 2aE(X) + a^2 \right] \\
&= \sum_{x \in D} (x - E(X))^2 p(x) + (E(X) - a)^2.
\end{aligned}$$

□

Exemple 3.1 .
On reprend l'exemple 1 du paragraphe précédent. On a :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \left[(-5)^2 \times \frac{2}{6} + (0)^2 \times \frac{1}{6} + (2)^2 \times \frac{3}{6}\right] - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{89}{9}.$$

3.4.3 Moments centrés et non centrés d'une v.a.r discrète

Définition 3.4. Soit X une v.a.r discrète de support $D = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots\}$ ayant une fonction de masse $p(x)$ et soit r un entier naturel.

— On appelle *moment d'ordre* r de X, le nombre $m_r(X)$ -s'il existe- défini par

$$m_r(X) = \sum_{i-1}^{+\infty} x^r p(x).$$

— Si X admet une espérance, on appelle *moment centré d'ordre* r de X, le nombre

$$\mu_r(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} (x - E(X))^r p(x).$$

Remarque .
On peut constater les relations suivantes :
$E(X) = m_1(X)$.
$V(X) = \mu_2(X) = m_2(X) - [m_1(X)]^2$.

4 Variable aléatoire absolument continue

Définition 4.1. Une v.a.r X est dite absolument continue si sa fonction de répartition $F_X(x)$ est continue (à droite et à gauche) et admet une dérivée à droite et à gauche. Dans ce cas, l'ensemble de définition ou le support de X est alors une réunion d'intervalles ; on le notera par la suite C.

Exemples .

1. On considère une cible circulaire de rayon $R_0 > 0$ et supposons que les tirs atteignent la cible. Si on désigne par X la distance du point d'impact au centre de la cible, on peut considérer X comme une variable aléatoire de support $C = [0, R_0]$.
2. Soit X la v.a.r. qui désigne la durée de vie d'un certain type de moteurs. Dans ce cas X est une v.a.r absolument continue sur $C = \mathbb{R}^+$.
3. Soit X la variable qui désigne la taille des individus d'une population. X est alors une v.a.r. absolument continue sur $C = \mathbb{R}^+$.

Remarque .
Soit X une v.a.r absolument continue et soit $F_X(x)$ sa fonction de répartition. D'après la Proposition 2.1, on a $p(a) = P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$. Avec $F_X(a^-) = P(X < a)$ pour tout point

a.
Mais puisque X est une variable absolument continue, $F_X(x)$ est une fonction continue à droite et à gauche. Ce qui donne $F_X(a^-) = P(X < a) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} P(X \leq a) = F_X(a)$. Par conséquent

$$p(a) = P(X = a) = 0.$$

4.1 Densité de probabilité d'une v.a.r absolument continue ou loi de probabilité

On a vu que dans le cas d'une v.a.r absolument continue la probabilité attachée à un point est nulle. Dans ce cas là, on définit la notion de *densité de probabilité* qui est une fonction notée $f(x)$, obtenue en dérivant la fonction de répartition de X.

Définition 4.2. Soit X une v.a.r absolument continue de fonction de répartition $F_X(x)$. On définit $f(x)$, densité de probabilité de X si et seulement si $f(x)$ vérifie les conditions suivantes :

(i) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) La fonstion f est continue sur $\mathbb{R}$ ou discontinue en certains points, mais admet une limite finie à gauche et à droite.

(iii) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

(iv) F_X est liée à f par la relation $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

4.2 Probabilité attachée à un intervalle

Lorsque la v.a.r X est absolument continue et du fait que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $p(a) = 0$, on a $P([a, b]) = P(]a, b[) = F_X(b) - F_X(a)$.
On peut donc écrire l'importante relation

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^{b} f(t)dt - \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

4.3 Moments d'une variable aléatoire absolument continue

Définition 4.3. Soit X une v.a.r absolument continue de support C et f une densité de X et soit $r \in \mathbb{N}^*$. On appelle moment d'ordre r de X noté $m_r(X)$, le nombre défini –s'il existe- par :

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)dt.$$

En particulier, l'espérance de X est le moment d'ordre 1, s'il existe, est donné par

$$E(X) = m_1(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt.$$

Si X admet une espérance, on appelle moment centré d'ordre r de X, s'il existe, le nombre défini par

$$\mu_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^r f(t)dt.$$

En particulier, on appelle variance de X, le moment centré d'ordre 2, donné par

$$\begin{aligned} V(X) = \mu_2(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 - 2tE(X) + [E(X)]^2) f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 f(t)dt - 2\int_{-\infty}^{+\infty} tE(X)f(t)dt + [E(X)]^2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \\ &= E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2. \end{aligned}$$

Et on note l'écart-type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemples

1. Soit X une v.a.r absolument continue de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^2 t\frac{t}{2}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_0^2 t^2\frac{t}{2}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2 = 2.$$

Donc

$$V(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

2. Soit X une v.a.r de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

— Vérifier que $f(x)$ est une densité de probabilité.
— Déterminer sa fonction de répartition.
— Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

5 Exercices

Exercice 1. Soit (Ω, T, P) un espace de probabilité avec $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ fini.

On considère l'application $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

a) Si $n = 2$ et $T = (\Omega, \emptyset)$ et X est telle que : $X(w_1) = x_1$, $X(w_2) = x_2$ avec $x_1 \neq x_2$. X est-elle une variable aléatoire ? justifier.

b) Si $n = 5$ et $T = \mathbb{P}(\Omega)$ et X est telle que : $X(w_1) = 0$, $X(w_2) = X(w_3) = 1$, $X(w_4) = X(w_5) = 2$.
— X est-elle une variable aléatoire sur Ω ? Si c'est le cas, déterminer le support, la fonction de masse et la fonction de répartition de cette variable aléatoire.
— Représenter graphiquement la fonction de répartition et en déduire les probabilités $P(-1 < X \leq 2)$ et $P(X \geq 3)$.

Exercice 2. Soit X la variable aléatoire qui désigne le nombre de filles dans une famille ayant 3 enfants.

1. Déterminer le support de de X.
2. En supposant que la probabilité d'avoir une fille est égale à p, Déterminer alors la fonction de masse et la fonction de répartition de X.
3. Calculer, en fonction de p, la probabilité que le nombre de filles soit au plus égal à 2.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire discrète telle que son support est donné par $D_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et sa fonction de masse par

x	0	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	0.07	c	0.12	0.18	2c	0.18

(a) Quelle est la valeur de c ?

(b) Calculer $E(X)$.

(c) Calculer $V(X)$.

(d) Calculer la fonction de répartition $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Exercice 4. Le nombre X de kilogrammes de tomates récoltés dans un jardin en une semaine est une variable aléatoire à valeurs entières telle que :

x	0	1	2	3
$P(X \leq x)$	0.1	0.6	0.9	1

1. Déduire la fonction de masse de X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 5. Une composante d'un système électronique a une fiabilité de 85%. Afin d'augmenter la fiabilité globale du système, trois de ces composantes sont installées en parallèle et le système tombe en panne si les trois composantes tombent en panne. Les trois composantes fonctionnent de manière indépendante. Considérons la variable aléatoire X qui désigne le nombre de composantes qui fonctionnent parmi les trois.

1. Calculer la fonction de masse de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Quelle est la probabilité que le système fonctionne ?

Exercice 6. Une variable aléatoire absolument continue X admet pour densité de probabilité la fonction f suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 6x(x-1) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de la V.A. X.
3. En utilisant cette fonction de répartition, calculer les probabilités $P(X \leq \frac{1}{2})$, $P(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3})$, $P(X \leq \frac{1}{6})$.
4. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 7. Dans une ville, la demande quotidienne d'eau (en millions de litres) est une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} x \, \mathrm{e}^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Quelle est la probabilité que la demande quotidienne de cette ville ne dépasse pas 5 millions de litres ?

(b) Quelle devrait être la capacité maximale quotidienne de la ville pour que la probabilité de répondre à la demande soit de 95% ?

(c) Calculer l'espérance et l'écart-type de la demande quotidienne en eau de cette ville.

Exercice 8. La durée de vie d'un certain type de pneu (en km) est une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{24000}\,\mathrm{e}^{-x/k} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer k.
2. Quelle est la probabilité que la durée de vie du pneu
   (a) soit de 18 000 km ou moins ?
   (b) soit comprise entre 18 000 km et 20 000 km ?
   (c) soit supérieure à 28 000 km.
3. Quelle est la durée de vie moyenne du pneu ?

CHAPITRE 3

LOIS DE PROBABILITÉ USUELLES

1 Lois discrètes usuelles

1.1 Loi Discrète Uniforme

Définition 1.1. Une distribution de probabilité suit une loi discrète uniforme sur le support $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, lorsque toutes les valeurs prises par la variable aléatoire sont équiprobables.
Si n est le nombre de valeurs différentes prises par la variable aléatoire X, alors $\forall i, P(X = x_i) = \frac{1}{n}$.
La fonction de masse de X s'écrit alors

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 1.1 .
La distribution des chiffres obtenus au lancer d'un dé non pipé, suit une loi uniforme dont la fonction de masse est

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec une espérance égale à $E(X) = \sum_{i=1}^{n} i \times \frac{1}{6} = 3.5$ et une variance $V(X) = 2.92$

Espérance et variance. Dans le cas particulier d'une loi discrète uniforme où **les valeurs de la variable aléatoire** X **correspondent au rang** $x_i = i$ ($\forall i \in [\![1, n]\!]$), on a

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

1.2 Loi de Bernoulli

Définition 1.2. Une épreuve de Bernoulli est une épreuve à deux issues, souvent appelées *succès (1)* et *échec (0)* et on a $\Omega = \{S, E\}$. On définit alors la variable aléatoire X de support $D = \{1, 0\}$.
On suppose que $P(X = 1) = p$ et donc $P(X = 0) = q = 1 - p$, la fonction de masse s'écrit alors

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ q = 1 - p & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On dit alors que la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \sim B(p)$.

Espérance et variance. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli $B(p)$. Alors on a $E(X) = p$ et $V(X) = pq = p(1 - p)$.

1.3 Loi Binomiale

Définition 1.3. On considère une épreuve de Bernoulli qu'on répète n fois de manière indépendante. Donc l'espace des événements $\Omega = \{S, E\}^n$ et un élément de Ω est un n-uplet composé de S et de E. Notons par X la variable aléatoire définie sur Ω et qui compte **le nombre de succès obtenus** sur les n épreuves.
Le support D de X est alors $D = \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$ et la loi de probabilité de la v.a.r X est donnée par :

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \mathrm{C}_n^x \, p^x (1-p)^{n-x} & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On dira alors que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p et on notera $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Exemple 1.2 .
On jette une pièce de monnaie bien équilibrée 10 fois de suite. On désigne par X la v.a.r qui compte le nombre de piles obtenues sur les 10 jets. X suit alors une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{2}$. Donc

la loi de probabilité de X s'écrit :

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \mathrm{C}_{10}^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} & \text{si } x \in [\![0, 10]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Espérance et variance. Soit X une v.a.r qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ alors

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p).$$

Car

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{n} xp(x) = \sum_{x=0}^{n} x\, \mathrm{C}_n^x\, p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!} x p^x (1-p)^{n-x} \\ &= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x} \\ &= np \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{l!(n-1-l)!} p^{l} (1-p)^{n-1-l} \\ &= np(p+1-p)^{n-1} = np. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)p(x) = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\, \mathrm{C}_n^x\, p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!} x(x-1) p^x (1-p)^{n-x} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} (1-p)^{n-x} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{l=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{l!(n-2-l)!} p^{l} (1-p)^{n-2-l} \\ &= np(p+1-p)^{n-2} = n(n-1)p^2. \end{aligned}$$

Or $E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X) + [E(X)]^2 - [E(X)]^2 = V(X) - E(X) + [E(X)]^2$.
Donc $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - [E(X)]^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$.

1.4 Loi Multinomiale

Définition 1.4. Soit l'ensemble fondamental $\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_k\}$, associé à une expérience aléatoire qu'on répète n fois de manière identique et indépendante, avec $p(w_i) = p_i$. Soit X_i le nombre d'occurrence de l'événement w_i le long des n répétitions. Autrement dit, X_i est une variable binomiale de paramètres (n, p_i).

On s'intéresse alors à la probabilité que $X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_k = n_k$ et on dit que le vecteur $(X_1, X_2, ..., X_k)$ suit une *loi multinomiale* de support $D = \{0, 1, \ldots, n\}$. Et on a :

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_k = n_k) = \begin{cases} \dfrac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k} & \text{si } n_i \in D, i = 1..k. \\ & \text{avec } \sum_{i=1}^{k} n_i = n \text{ et } \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $X \sim \mathcal{M}(n, p_1, p_2, \ldots, p_k)$.

Exemple 1.3 .
On tire 5 fois **avec remise** une boule d'une urne qui contient 8 boules blanches, 6 rouges et 6 jaunes. On veut calculer la probabilité de tirer 2 boules rouges, 2 blanches et 1 boule jaune dans les 5 tirages de l'expérience.
Remarquons que lors d'un tirage, la probabilité d'avoir une boule blanche est égale à $p_1 = \dfrac{8}{20}$, celle d'avoir une boule rouge est égale à celle d'obtenir une boule jaune et est égale à $p_2 = p_3 = \dfrac{6}{20}$.
On définit donc les v.a.r :
X_1 : le nombre de boules blanches.
X_2 : le nombre de boules rouges.
X_3 : le nombre de boules jaunes.
On veut alors calculer $P(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1) = \dfrac{5!}{2!2!1!} \left(\dfrac{8}{20}\right)^2 \left(\dfrac{6}{20}\right)^2 \left(\dfrac{6}{20}\right)^1 \approx 0.13.$

Espérance et variance. Comme la v.a.r multinomiale est un vecteur de variables binomiales, l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ sont aussi définis à partir des vecteurs $(E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_k))$ et $(V(X_1), V(X_2), \ldots, V(X_k))$ où $E(X_i) = np_i$ et $V(X_i) = np_i(1 - p_i)$.

1.5 Loi Géométrique

Définition 1.5. On répète un infinité de fois une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité de succès vaut p et la probabilité d'échec vaut $1 - p$.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'essais nécessaires à l'obtention du premier succès. X est donc de support $\mathbb{N}^*$, et sa loi de probabilité est donnée par :

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & \text{si } x \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On dit alors que la variable aléatoire X suit la *loi géométrique* de paramètre p et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Espérance et variance. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p > 0$. Alors

$$E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Puisque

$$E(X) = \sum_{x=1}^{+\infty} xp(1-p)^{x-1} = p\sum_{x=0}^{+\infty} x(1-p)^{x-1} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Et

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=1}^{+\infty} x(x-1)p(1-p)^{x-1} = p(1-p)\sum_{x=0}^{+\infty} x(x-1)(1-p)^{x-2} = \frac{2p(1-p)}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}.$$

Donc

$$V(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}.$$

1.6 Loi Binomiale Négative

Définition 1.6. On répète une épreuve de Bernoulli jusqu'à obtenir n succès et on considère la variable aléatoire discrète X qui représente le nombre d'épreuves indépendantes x nécessaires à l'obtention de ces n succès. Le support de X est alors $\mathbb{N}$.
On dit que X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p notée $\mathcal{BN}(n,p)$ avec :

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \mathrm{C}_{x-1}^{n-1}\, p^n (1-p)^{x-n} & \text{si } x, n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \geq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque .
Dans le cas de la loi binomiale négative, le nombre de succès n est connu et l'on cherche le nombre d'épreuves x nécessaires pour obtenir les n succès. Ainsi, le dernier évènement est connu car les épreuves cessent avec l'obtention du $n^{ème}$ succès et l'on choisit $n-1$ objets parmi $x-1$.

Exemple 1.4 .
Dans une expérience où on choisit au hasard un nombre naturel entre 1 et 20, on veut calculer le nombre d'essais nécassaires pour choisir le nombre cinq, 4 fois.
Quelle est la probabilité que le nombre d'essais pour le choix du nombre cinq, 4 fois, soit égal à 9.
On considère X qui représente le nombre x d'essais nécessaires pour l'obtention du nombre cinq 4 fois.
On veut donc calculer $P(X = 9) = \mathrm{C}_8^3 \left(\frac{1}{20}\right)^4 \left(\frac{19}{20}\right)^5$.

Espérance et variance. Soit $X \sim \mathcal{BN}(n,p)$, alors on a

$$E(X) = \frac{n}{p} \text{ et } V(X) = \frac{n(1-p)}{p^2}.$$

1.7 Loi Hypergéométrique

Définition 1.7. On considère une urne contenant M boules dont B blanches et $M - B = N$ noires. On tire **en une seule fois** k boules ($k \leq M$), et on appelle X la v.a.r égale au nombre de boules blanches obtenues parmi les k tirées.
Dans ce cas on a $D \subset [\![0,k]\!]$ et plus précisément $D = [\![\max(0,k-N), \min(k,B)]\!]$.
On aura alors :

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{C}_B^x \times \mathrm{C}_N^{k-x}}{\mathrm{C}_M^k} & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On dit alors que X suit la *loi hypergéométrique* de paramètres (M,B,k) et on note $X \sim \mathcal{H}(M,B,k)$.

Exemple 1.5 .
Dans un lot de 10 pièces, 4 sont défectueuses. On choisit au hasard 3 pièces et on veut calculer la probabilité qu'il y ait 2 pièces défectueuse parmi celle choisies.
En notant par X le nombre de pièces défectueuses parmi les 3 choisies, le support de X est alors $D = [\![0,3]\!]$. La fonction de masse de la v.a.r X est donnée par

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{C}_4^x \times \mathrm{C}_6^{3-x}}{\mathrm{C}_{10}^3} & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On veut alors calculer $P(X=2) = \dfrac{\mathrm{C}_4^2 \times \mathrm{C}_6^1}{\mathrm{C}_{10}^3}$.
Si maintenant on choisit 7 pièces , $D = [\![1,4]\!]$ et la fonction de masse est donnée par

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{C}_4^x \times \mathrm{C}_6^{7-x}}{\mathrm{C}_{10}^7} & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Espérance et variance. Soit X une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(M,B,k)$, alors

$$E(X) = k\frac{B}{M} \text{ et } V(X) = k\frac{B \times N \times (M-k)}{M^2 \times (M-1)}.$$

1.8 Loi de Poisson

Définition 1.8. On dit qu'une variable aléatoire X suit *la loi de Poisson* ou un processus Poissonnien de paramètre $\lambda > 0$ si le support $D = \mathbb{N}$ et loi de probabilité est donnée par

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^x}{x!} & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On notera alors $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque .
En pratique, la loi de poisson est utilisée pour approcher certains phénomènes, par exemple :

- Le nombre d'appels téléphoniques reçus pendant un intervalle de temps.
- Le nombre de voitures traversant un certain pont, dans un intervalle de temps donné.
- Le nombre d'arrivés à un guichet, en un intervalle de temps.

Espérance et variance Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ alors $E(X) = V(X) = \lambda$. Car

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{+\infty} x p(x) = \sum_{x=0}^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^x}{x!} = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,e^{\lambda} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{x=0}^{+\infty} x(x-1)p(x) = \sum_{x=0}^{+\infty} x(x-1)\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^x}{x!} = \lambda^2\,\mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{x=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} = \lambda^2\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,e^{\lambda} \\ &= \lambda^2. \end{aligned}$$

On déduit que $V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Exemple 1.6 .
Le nombre moyen de communications téléphoniques reçues entre 8h15 et 8h16, est de 1.8. Quelle est la probabilité qu'entre 10.54 et 10.55 on reçoive 2 appels.
Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de communications reçues par minute. X suit alors une loi de Poisson de paramètre 1.8, et on écrira

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1.8}\,\dfrac{1.8^x}{x!} & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc pour avoir la probabilité de recevoir 2 appels on calculera $p(2) = P(X = 2) = \frac{1.8\,\mathrm{e}^{-1.8\times 2}}{2!} \approx 0.44$.
Si maintenant on désire connaître la probabilité de recevoir un appel entre 10.56 et 11.00 (soit 4 minutes), il faut considérer une variable aléatoire Y qui suit la loi de poisson de paramètre $1.8 \times 4 = 7.2$.

2 Lois continues usuelles

2.1 Loi Uniforme

Définition 2.1. Définition On dit que la v.a.r X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, si sa fonction densité est constante sur cet intervalle. On notera $X \sim \mathcal{U}[a, b]$.
La densité de probabilité de la loi uniforme s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Fonction de répartition. La fonction de répartition de la v.a.r uniforme est calculée par

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_a^x \frac{1}{b-a}dt = \frac{1}{b-a}\,[t]_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

D'où on a

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Espérance et variance. Soit X une v.a.r qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$; alors on a

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exemple 2.1 .
Le temps d'attente dans un service d'urgences d'un hôpital donné peut aller jusqu'à trois heures. On veut calculer la probabilité d'attendre au plus une heure.
On définit une v.a.r X qui représente le temps d'attente au service d'urgence. X suit alors une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 3]$.
on cherche alors à calculer $P(X \leq 1) = F_X(1) = \frac{1}{3}$.

Si maintenant on veut calculer la probabilité que le temps d'attente soit entre 15 et 30 minutes, on calcule

$$P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{2}) = F_X(\frac{1}{2}) - F_X(\frac{1}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} dx = \frac{1}{12}.$$

2.2 Loi Exponentielle

Définition 2.2. Soit X une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec $\lambda > 0$. On dit alors que X suit la *loi exponentielle* de paramètre λ et est notée $\mathcal{E}(\lambda)$.

Fonction de répartition. La fonction de répartition de la variable exponentielle X est donnée par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda t} \, dt = \lambda \left[\frac{-1}{\lambda} \, \mathrm{e}^{-\lambda t} \right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \, .$$

D'où on a

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Espérance et variance. Soit X une v.a.r suivant la loi exponentielle, alors

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Puisque

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda x \, \mathrm{e}^{-\lambda x} \, dx = \lambda \left(\left[-\frac{1}{\lambda} x \, \mathrm{e}^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda} \left[-\frac{1}{\lambda} \, \mathrm{e}^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Et

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 \, \mathrm{e}^{-\lambda x} \, dx = \lambda \left(\left[-\frac{1}{\lambda} x^2 \, \mathrm{e}^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \frac{2}{\lambda^2} \int_0^{+\infty} \lambda x \, \mathrm{e}^{-\lambda x} \, dx \right)$$
$$= \frac{2}{\lambda^2}.$$

Donc $V(X) = \dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Remarque .

La loi exponentielle est une des lois utilisées pour modéliser des variables aléatoires décrivant une durée de vie **sans vieillissement ou sans mémoire**. Il s'agit en général de phénomènes accidentels. Pour ces phénomènes, la probabilité qu'un objet soit encore en vie ou qu'il ne tombe pas en panne avant un délai donné sachant que l'objet est en bon état à un instant t, ne dépend pas de t.

Pour un verre en cristal par exemple, la probabilité d'être cassé dans les cinq ans ne dépend pas de sa date de fabrication.

Mathématiquement, on a l'importante propriété d'une variable exponentielle

$$P(X \geq s + t / X \geq t) = P(X \geq s).$$

Car l'événement "$X \geq t + s$" est inclus dans l'événement "$X \geq t$". Par conséquent

$$P(X \geq s + t / X \geq t) = \frac{P(\text{"}X \geq s + t\text{"} \cap \text{"}X \geq t\text{"})}{P(X \geq t)} = \frac{P(X \geq s + t)}{P(X \geq t)}$$
$$= \frac{1 - F_X(s + t)}{1 - F_X(t)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda(s+t-t)} = 1 - F_X(s) = P(X \geq s).$$

Exemple 2.2 .

La durée de vie d'un composant est une variable aléatoire, exprimée en jours, qui suit une loi exponentielle de paramètre 0.004. On veut calculer la probabilité que la durée de vie du composant excède trois cents jours, autrement dit $P(X \geq 300) = 1 - F_X(300) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-0.004 \times 300}) \approx 0.301$.

Si maintenant on veut calculer la probabilité que la durée de vie est au moins 400 sachant qu'elle a dépassé 300, on calcule alors la probabilité $P(X \geq 400/X \geq 300) = P(X \geq 300 + 100/X \geq 300) = P(X \geq 100) = 1 - F_X(100) = \mathrm{e}^{-0.004 \times 100} \approx 0.02$.

2.3 Loi Gamma

Définition 2.3. On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit *la loi Gamma* de paramètres $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$, notée $\Gamma(\alpha, \lambda)$, si sa densité de probabilité est telle que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1} & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Où $\Gamma(\alpha)$, appelée *fonction Gamma*, est définie par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, x^{\alpha-1} dx.$$

$\Gamma(\alpha)$ possède les propriétés suivantes :

- $\Gamma(1) = 1, \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$,
- si $\alpha \in \mathbb{N}^*, \Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$,
- si $\alpha > 1, \Gamma(\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha - 1)$.

Remarques .

- La loi Gamma est elle aussi utilisée pour décrire certains phénomènes de durée de vie. Notons aussi que pour $\alpha = 1$, on retrouve la loi exponentielle de paramètre λ.
- Dans le cas particulier de la loi Gamma avec $\alpha = \dfrac{n}{2}$ et $\lambda = \dfrac{1}{2}$, cette loi est appelée *loi de Khi-deux* à n degrés de liberté, et est notée χ^2_n qui est très utilisée en tests statistiques.
- Quand $\alpha \in \mathbb{N}^*$, Cette loi est appelée la loi d'Erlang de paramètres α et λ.

Fonction de répartition. Dans le cas général, il est difficile d'expliciter la fonction de répartition de la loi Gamma. Ses valeurs sont données sous forme de tables [(1)] à partir de logiciels spécialisés en statistique.
Mais dans la cas où $\alpha \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de la loi d'Erlang est donnée par

$$F_X(x) = 1 - \sum_{n=0}^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!}.$$

Espérance et variance. Soit $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, alors

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} \text{ et } V(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

(1). Wilks, D. *Gamma Distribution Probability Tables for use in Climatology*

Car

$$E(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{e}^{-\lambda x} x^\alpha dx = \frac{\alpha}{\lambda\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda x)^\alpha \lambda dx.$$

(Puisqu'on a $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \Longrightarrow \Gamma(\alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$).
Avec le changement de variable $u = \lambda x$, on a

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda x)^\alpha \lambda dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} u^\alpha du = \Gamma(\alpha+1).$$

D'où

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda\Gamma(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1) = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

De même

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{e}^{-\lambda x} x^{\alpha+1} dx = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2\Gamma(\alpha+2)} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha+1} \lambda dx.$$

Avec un changement de variable $u = \lambda x$, on a

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha+1} \lambda dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} u^{\alpha+1} du = \Gamma(\alpha+2).$$

D'où

$$E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} \text{ et par conséquent } V(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

2.4 Loi Normale

Définition 2.4. On dit que X suit la loi de *Laplace-Gauss* ou *la loi Normale* de paramètres m et σ (avec $\in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$), si X est une v.a.r absolument continue dont la densité de probabilité s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\dfrac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Nous noterons $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$.

Étude de la densité de probabilité $\varphi_{m,\sigma}(x)$. On peut remarquer que :

- $\varphi_{m,\sigma}(m+x) = \varphi_{m,\sigma}(m-x)$, (la représentation graphique de $\varphi_{m,\sigma}(x)$ est symétrique par rapport à la droite $x = m$).
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi_{m,\sigma}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_{m,\sigma}(x) = 0$.

— $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'_{m,\sigma}(x) = -\dfrac{x-m}{\sigma^2}\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\dfrac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

— $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi''_{m,\sigma}(x) = \dfrac{(x-m)^2-\sigma^2}{\sigma^4}\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\dfrac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$m-\sigma$		m		$m+\sigma$		$+\infty$
$\varphi''_{m,\sigma}(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\varphi'_{m,\sigma}(x)$			$+$		0		$-$		
$\varphi_{m,\sigma}(x)$	0	↗		↗	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	↘		↘	0

Et la représentation graphique est alors la suivante

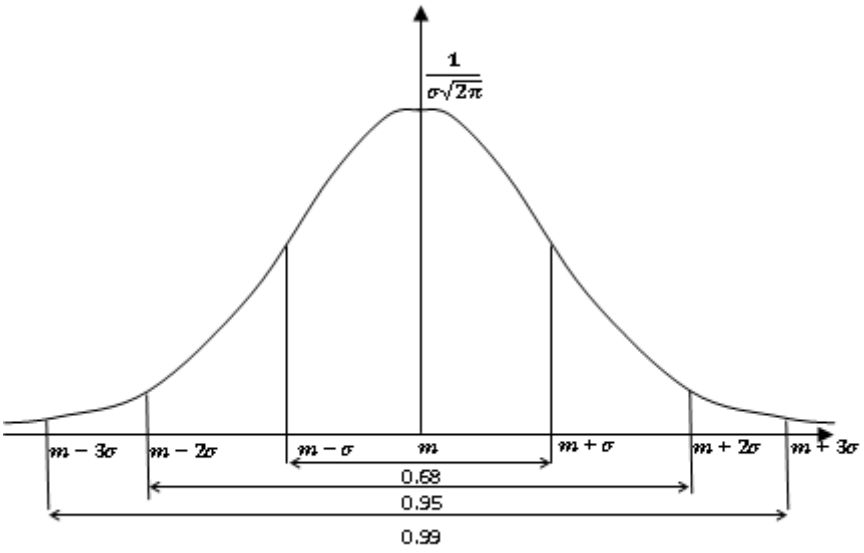


FIGURE 3.1 – Représentation graphique de la loi normale.

Fonction de répartition. Il n'est pas facile d'expliciter la fonction de répartition notée $\Phi_{m,\sigma}$ définie par

$$\Phi_{m,\sigma} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\dfrac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

à l'aide des fonctions usuelles.

Espérance et variance Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$. On a $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$.

2.5 Loi Normale Centrée Réduite

Définition 2.5. Une v.a.r X suit une *loi normale centrée réduite* si sa densité de probabilité est égale à

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

et on note $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
On énonce alors l'important théorème suivant :

Théorème 2.1 .
Soit X une variable qui suit la loi normale de paramètres m et σ, et posons $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$. Alors on a

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma) \Longleftrightarrow Y \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Preuve.
$\Rightarrow$) On suppose que $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$. Soit $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$ et soit $F_Y(x)$ la fonction de répartition de Y.
On a alors par définition :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\frac{X - m}{\sigma} \leq x) = P(X \leq \sigma x + m) = \Phi_{m,\sigma}(\sigma x + m) = \int_{-\infty}^{\sigma x + m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \, dt$$

En posant $u = \dfrac{t - m}{\sigma}$, donc $du = \dfrac{1}{\sigma} dt$ on aura $F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{-u^2}{2}} \, du$, qui n'est autre que la fonction de répartition d'une loi normale avec $m = 0$ et $\sigma = 1$.
$\Leftarrow$) Soit $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$ une v.a.r qui suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ telle que X est une variable aléatoire de fonction de répartition $F_X(x)$, alors on a

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{x - m}{\sigma}) = P(Y \leq \frac{x - m}{\sigma}) = \Phi_{0,1}(\frac{x - m}{\sigma}).$$

Donc

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{-u^2}{2}} \, du.$$

On pose $t = \sigma u + m$, donc $dt = \sigma du$. On aura

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \Phi_{m,\sigma}(x)$$

D'où X est une v.a.r qui suit la loi normale de paramètres m et σ ce qui achève la démonstration. □

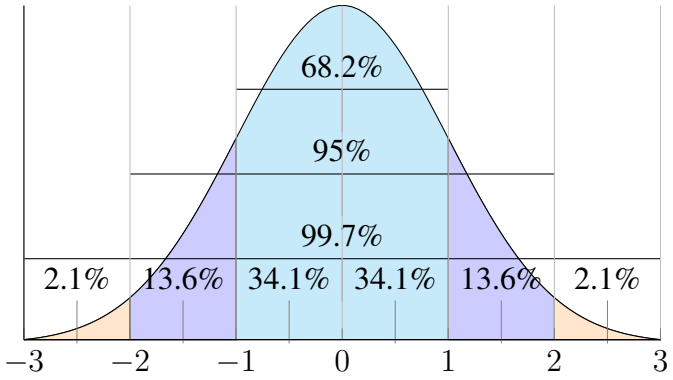


FIGURE 3.2 – Densité de probabilité de la loi normale centrée réduite.

Espérance et variance. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Alors $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.

2.5.1 Fonction de répartition

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. La fonction de répartition de X, notée $\Pi(x) = P(X \leq x)$, n'est pas calculable par les méthodes classiques d'intégration, Ces probabilités sont obtenues par approximation, et sont disponibles sous forme de tables en fonction de la valeur de x (Table 3.1).

Propriétés de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, soit $\Pi(x)$ sa fonction de répartition. Alors :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \Pi(-x) = 1 - \Pi(x)$. En particulier on a $\Pi(0) = \dfrac{1}{2}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+, P(|X| \leq x) = 2\Pi(x) - 1$ et $P(|X| \geq x) = 2(1 - \Pi(x))$.

Exemples d'utilisation de la table. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
On veut calculer $P(X \leq 1.15), P(X \leq 0.10), P(X \leq -2.53), P(|X| \leq 1)$.
En utilisant la table de $\Pi(x)$ et ses propriétés, on a :

— $P(X \leq 1.15) = \Pi(1.15) = 0.8749 \approx 0.875$.
— $P(X \leq 0.10) = \Pi(0.10) = 0.5398 \approx 0.54$.
— $P(X \leq -2.53) = 1 - \Pi(2.53) \approx 0.0057$.
— $P(|X| \leq 1) = P(-1 \leq X \leq 1) = 2\Pi(1) - 1 \approx 0.683$.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLE 3.1 – Table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\Pi(x)$.

On peut aussi utiliser la table, si on veut définir un nombre α, pour lequel $P(|X| \leq \alpha) = a$. Où a est donné.

Dans ce cas, on a $2\Pi(\alpha) - 1 = a$ et donc $\Pi(\alpha) = \frac{1}{2}(a + 1)$. On cherche alors le plus petit intervalle

de valeurs contenant $\Pi(\alpha)$, soit $[A, B]$.
On obtient alors un plus petit intervalle qui contient α, soit $\Pi^{-1}(A) \leq \alpha \leq \Pi^{-1}(B)$.
Donc on peut approcher la valeur de α selon sa position dans l'intervalle.

Exemple 2.3 .
On veut chercher α pour lequel on a $P(|X| \leq \alpha) = 0.05$.
On calcule $\frac{1}{2}(0.05 + 1) = 0.525$.
Dans la table, le plus petit intervalle qui contient cette valeur est $[0.5239; 0.5279]$, qui correspond à l'intervalle des valeurs de x $[0.06; 0.07]$.
En estimant la position de la valeur 0.525 dans l'intervalle $[0.5239; 0.5279]$ à 10^{-3} près, on obtient la valeur correspondante de α dans l'intervalle $[0.06; 0.07]$, soit $\alpha = 0.0625$.

2.5.2 Calcul de la probabilité attachée à un intervalle d'une v.a.r normale de paramètres m et σ

Soit X Une v.a.r qui suit la loi normale de paramètres m et σ.
La probabilité d'un intervalle $P(a \leq X \leq b)$, se calcule en utilisant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\Pi(x)$ en posant $Y = \frac{X-m}{\sigma}$. On a alors :

$$P(a \leq X \leq b) = P(\frac{a-m}{\sigma} \leq Y \leq \frac{b-m}{\sigma} = \Pi(\frac{b-m}{\sigma}) - \Pi(\frac{a-m}{\sigma}).$$

Exemple 2.4 .
Soit $X \sim \mathcal{N}(-8, 5)$. On veut calculer la probabilité $P(-9.5 \leq X \leq -7)$. Pour cela, on pose $Y = \dfrac{X+8}{5}$ et on a

$$P(-9.5 \leq X \leq -7) = P(\frac{-9+8}{5} \leq Y \leq \frac{-7+8}{5} = \Pi(0.2) - \Pi(-0.3) = \Pi(0.2) - [1 - \Pi(0.3)] \approx 0.198.$$

3 Approximation de lois

3.1 Approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson

Théorème 3.1 .
Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. On peut approcher la loi binomiale par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ lorsque $n \geq 20$ et $p \leq 0.05$ ou $n \geq 100$ et $np \leq 10$.

Exemple 3.1 .
Dans une chaîne de fabrication, 5% des pièces sont défectueuses. On prélève une pièce, on examine si elle est défectueuse et on la replace parmi les autres. On répète 120 fois cette expérience et on désigne

par X la variable aléatoire qui compte le nombre des pièces défectueuses. Il est clair que X suit la loi binomiale de paramètres $p = 0.05$ et $n = 120$.
Donc si on veut calculer $P(X = 4)$, par la loi Binomiale on a

$$P(X = 4) = \mathrm{C}_{120}^{4}(0.05)^4(0.95)^{116} \approx 0.1337.$$

Mais puisque $n = 120 > 100$ et $np = 6 < 10$, on peut approcher la loi de X à une loi de poisson de paramètre $\lambda = np = 6$.On obtient alors pour $X = 4$

$$P(X = 4) = \mathrm{e}^{-6}\,\frac{6^4}{4!} \approx 0.1338.$$

3.2 Approximation de la loi Binomiale par la loi Normale

On peut aussi approcher une loi Binomiale de paramètres (n, p) par une loi Normale de paramètres $(np, \sqrt{np(1-p)})$ lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.
Comme l'approximation est d'une loi discrète par une loi continue, on doit effectuer une correction de continuité, c'est à dire qu'à la valeur x_0 de la variable discrète, nous associons l'intervalle $[x_0 - 0.5; x_0 + 0.5]$.

Exemple 3.2 .
On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(400, 0.5)$. On peut approcher cette loi par la loi Normale $\mathcal{N}(200, 10)$.
Ainsi, si l'on considère la variable Z suivant cette loi normale, on approchera $P(X = 190)$ par $P(189.5 \leq Z \leq 190.5)$.
En effectuant le changement de variable adéquat, on a

$$\begin{aligned} P(189.5 \leq Z \leq 190.5) = P(-1.05 \leq \frac{Z - 200}{10} \leq -0.95) &= \Pi(-0.95) - \Pi(-1.05) \\ &= 1 - \Pi(0.95) - 1 + \Pi(1.05) \approx 0.0242. \end{aligned}$$

ce qui donne ici une très bonne approximation puisque le calcul direct donne $P(X = 190) \approx 0,02420713896$.
De même, $P(X \leq 210)$ sera approché par $P(Z \leq 210.5) = P(\frac{Y-200}{10} \leq 1.05) \approx 0,8531$.

3.3 Approximation de la loi de Poisson par la loi Normale

On peut approcher la loi de Poisson de paramètre λ par une loi Normale de paramètres $(\lambda, \sqrt{\lambda})$, lorsque $\lambda \geq 25$.

Exemple 3.3 .

Le nombre quotidien de patients examinés dans une clinique suit une loi de Poisson de paramètre 30.
On veut calculer la probabilité que le nombre de patients soit égal à 40, Mercredi prochain.
Soit X le nombre de patients examinés quotidiennement. $X \sim \mathcal{P}(30)$
On veut calculer $P(X = 40)$.
Par le calcul direct on a $P(X = 40) = \mathrm{e}^{-30}\,\dfrac{30^{40}}{40!} \approx 0.014$.
Par approximation à une loi Normale de paramètres $(30, \sqrt{30})$, on a

$$P(X = 40) = P(39.5 \leq Z \leq 40.5) = P(1.734 \leq \frac{Z - 30}{\sqrt{30}} \leq 1.917) \approx \Pi(1.92) - \Pi(1.73)$$
$$= 0.9726 - 0.9582 = 0,0144.$$

4 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Nous terminons ce chapitre par donner un important résultat qui permet d'obtenir une borne pour une certaine probabilité, lorsque l'espérance et la variance de la variable aléatoire sont finies.

Proposition 4.1 .
Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance finie σ^2. Alors pour tout réel strictement positif α,

$$P\left(|X - E(X)| \geq \alpha\right) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

Exemple 4.1 .
Soit X une variable aléatoire qui représente la note des étudiants, de moyenne 11 et de variance 1. On ne connaît pas la loi de X mais on veut avoir une borne inférieure pour la probabilité que la note soit comprise entre 9 et 13. On a

$$P(9 \leq X \leq 13) = P(11 - 2 \leq X \leq 11 + 2) = P(-2 \leq X - 11 \leq +2) = P(|X - 11| \leq 2).$$

Mais $P(|X - 11| \leq 2) = 1 - P(|X - 11| \geq 2)$ et par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$P(|X - 11| \geq 2) \leq \frac{1}{4}.$$

D'où

$$P(|X - 11| \leq 2) \geq \frac{3}{4}.$$

5 Exercices

Exercice 1. Une urne contient 6 boules blanches, 3 noires et une rouge. On tire au hasard une après

une avec remise, 4 boules de cette urne. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches tirées.

1. Quelle est la loi de probabilité de X.
2. Calculer la probabilité de tirer au moins 2 boules blanches.

Exercice 2. Pour l'examen du code de la route, les candidats doivent remplir un questionnaire de 20 questions, en choisissant, pour chacune d'elles l'une des quatre réponses proposées, dont une seule est exacte. Un candidat totalement ignorant décide de tenter sa chance en cochant complètement au hasard une réponse pour chaque question.

1. Quelle est la loi de probabilité du nombre X de bonnes réponses du candidat ?
2. Calculer $P(X \geq 10)$.

Exercice 3. On sait que la probabilité qu'une personne soit allergique à un certain médicament est égale à 0.05. On choisit un échantillon de 20 personnes, et on appelle X la variable aléatoire dont la valeur est le nombre de personnes allergiques dans l'échantillon.

1. Déterminer, en la justifiant, la loi de probabilité de X.
2. Calculer les probabilités des événements suivants :
   (a) Il y a exactement deux personnes allergiques dans l'échantillon.
   (b) Il y a au moins deux personnes allergiques dans l'échantillon.
3. En déduire alors le nombre moyen de personnes allergiques dans cet échantillon.

Exercice 4. Dans un groupe de 30 étudiants, 10 disposent d'un véhicule personnel. On choisit au hasard 5 étudiants de ce groupe. On désigne par X la variable qui compte le nombre d'étudiants choisis, ayant un véhicule personnel.

1. Quelle est la loi de probabilité de X.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait 3 étudiants sur les 5, qui disposent d'un véhicule personnel.

Exercice 5. Dans une boîte, il y a n cartes numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise, jusqu'à obtenir la carte n. Soit Z le nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de Z. Calculer la probabilité que le nombre de cartes tirées soit égal à r, pour $r \geq 1$.
2. On suppose que $n = 100$, quelle est la probabilité que le nombre de cartes tirées soit inférieur ou égal à 50 ?

Exercice 6. On place un hamster dans une cage. Il se trouve face à 5 portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. À chaque essai infructueux, il reçoit une décharge électrique et on le replace à l'endroit initial.

1. En supposant que le hamster ne soit pas doué d'apprentissage et qu'il choisisse donc de façon équiprobable entre les 5 solutions à chaque nouvel essai, déterminer la probabilité des événements :
   a) le hamster sort au premier essai,
   b) le hamster sort au troisième essai,
   c) le hamster sort au septième essai.
2. Le hamster mémorise maintenant les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'il n'a pas encore essayés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués.
   a) Quelles valeurs peut prendre X ? Déterminer sa loi de probabilité.
   b) Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$.
   c) Déterminer la variance $V(X)$.

Exercice 7. Le nombre moyen d'accidents survenus sur un autoroute, quotidiennement, est égal à 2.

— Calculer la probabilité que le nombre d'accidents ne dépasse pas 4 pour Lundi prochain.
— Quelle est la probabilité que le nombre d'accidents soit supérieur à 10, pour la semaine prochaine ?

Exercice 8. Une compagnie aérienne assure des liaisons entre différentes villes. On suppose que le nombre total de retards par semaine des vols suit une loi de Poisson de paramètre 3. Pour un mois donné, calculer la probabilité pour que le nombre total de retards soit inférieur à 6.

Exercice 9. Un arrêt de bus est desservi tous les quarts d'heures exacts (i.e. à 8h, 8h15, 8h30, etc.). Un usager arrive à l'arrêt à un instant aléatoire uniformément réparti sur 8h-8h30. On modélise son instant d'arrivée par X, la variable aléatoire égale au nombre de minutes écoulée depuis 8h, au moment de l'arrivée de l'usager à l'arrêt de bus. On a donc $X \sim \mathcal{U}[0, 30]$.

— Avec quelle probabilité l'usager attend-t-il le bus moins de 5 minutes ?
— Quelle est la probabilité que son temps d'attente soit entre 5 et 10 minutes

Exercice 10. On choisit un nombre réel au hasard entre -3 et 5.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre strictement inférieur à 1 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre supérieur ou égal à 3 ?
3. Quelle est la probabilité que le nombre choisi soit strictement inférieur à 1 , sachant qu'il est strictement positif ?

Exercice 11. On modélise la durée de vie d'un processeur (en années) par une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

1. Que vaut la durée de vie moyenne de ce processeur ?
2. Avec quelle probabilité le processeur vit-il plus de 6 mois ?
3. Avec quelle probabilité le processeur vit-il mois de 3 mois ?
4. Avec quelle probabilité le processeur vit-il entre 3 et six mois ?

Exercice 12. La durée de vie d'un appareil électronique est une variable aléatoire, exprimée en heures, qui suit une loi exponentielle de paramètre 0.00026.

1. Quelle est la probabilité que la durée de vie de l'appareil soit de 1000 heures au maximum ?
2. En déduire la probabilité que la durée de vie de l'appareil soit d'au moins 1000 heures.
3. Sachant que la durée de vie de l'appareil a dépassé 1000 heures, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 2000 heures ?
4. Sachant que l'appareil a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ?

Exercice 13. Soit X la variable aléatoire qui modélise la durée de vie du composant radioactif C_{14}. X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On appelle demi-vie de la V.A X, la durée de vie θ, pour laquelle on a $P(X \leq \theta) = 0,5$.

1. Montrer que $\theta = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$.
2. Si on sait que la demi-vie du C_{14} est estimée à 2000 ans, calculer :
   a) la durée de vie moyenne du C_{14} ;
   b) la probabilité que sa durée de vie soit au maximum 1000 ans ;
   c) la probabilité que sa durée de vie dépasse 3000 ans sachant qu'elle a dépassé 2000 ans.
3. Déterminer t, telle que $P(X \leq t) = 0,2$.

Exercice 14. On suppose que la durée d'une conversation téléphonique, mesurée en minutes, est la variable exponentielle de paramètre $\frac{1}{10}$. Un homme arrive à une cabine téléphonique et juste à ce moment précis, une personne passe devant cet homme.

1. Quelle est la probabilité que cet homme attende plus de dix minutes ?
2. Quelle est la probabilité qu'il attende entre dix et vingt minutes ?

Exercice 15. Soit X la variable aléatoire représentant les notes en mathématiques d'une section. On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(40, 10)$.
On veut partager cette section en 3 groupes A, B et C, tels que : $A = \{X \geq \alpha\}$, $B = \{\beta \leq X \leq \alpha\}$ et $C = \{X < \beta\}$.

— Déterminer les nombres α, β si on sait que $P(A) = 2P(B)$ et $P(B) = P(C)$.

Exercice 16. La variable aléatoire Z suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Quelle est la probabilité pour que

— $Z < 1,2$;
— $0,8 < Z < 1,2$;
— $-0,4 < Z < 1,5$;
— $|Z| > 0,01$.

Exercice 17. Soit X une v.a.r normale de paramètres $m = 4$ et $\sigma = 5$.

1. Calculer les probabilités : $P(|X| \leq 4)$, $P(X > 2)$.
2. Déterminer a et b tel que $P(X > a) \approx 0.04947$ et $P(X < b) \approx 0.15865$.

Exercice 18. Calculer l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire normale X sachant que $P(X \leq 2) = 0,5793$ et $P(X > 5) = 0,2119$.

Exercice 19. On suppose que la glycémie est distribuée normalement dans la population, avec une moyenne de $1g/l$ et un écart-type de $0,03g/l$. On mesure la glycémie chez un individu choisi au hasard.

1. Calculer la probabilité pour que sa glycémie soit :
   a) inférieure à 1,06 ;
   b) supérieure à 0,9985 ;
   c) comprise entre 0,94 et 1,08.
2. On mesure la glycémie chez 1000 individus choisis au hasard. Donner le nombre moyen d'individus dont la glycémie est supérieure à 0,99.

Exercice 20. On suppose que la taille de 615 étudiants est distribuée normalement avec une moyenne de 1,75 m et un écart-type de 20 cm. Calculer le nombre d'étudiants ayant des tailles :

1. inférieures ou égales à 1,50 m ;
2. comprises entre 1,50 m et 1,65 m ;
3. supérieures ou égales à 2 m.

Exercice 21. La capacité des ascenseurs est déterminée par le fait que le poids d'une personne suit une loi normale de moyenne 75kg et d'écart-type 5kg.
Dans un ascenseur du type WH1 le nombre maximum de personnes est de 9. Un voyant lumineux affiche qu'il y a sur-poids pour une masse supérieure à 700 kg, dans ce cas l'ascenseur ne démarre pas.

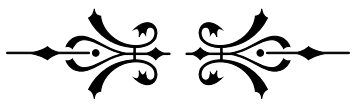
1. Calculer la probabilité qu'une personne montant dans l'ascenseur, ait un poids supérieur à 85kg.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait un sur-poids, quand un groupe de 9 personnes monte dans l'ascenseur.

Exercice 22. Une usine fabrique des composants électroniques dont 5% représentent des défauts. On considère un échantillon de 20 objets. Soit X le nombre de composants défectueux dans cet échantillon.

1. Préciser la loi de X et écrire sa fonction de masse.
2. Quelle est la probabilité qu'au plus 2 composants soient défectueux ?
3. Quel est le nombre moyen de composants défectueux dans cet échantillon ?

On considère maintenant un échantillon de 2000 composants. On approche alors X par une V.A Y qui suit une loi normale.

1. Préciser les paramètres de Y.
2. Calculer approximativement la probabilité que :
   (a) le nombre de composants défectueux soit égal à 120,
   (b) le nombre de composants défectueux soit inférieur à 85.
3. Déterminer le nombre approximatif α de composants tel que $P(X \leq \alpha) = 0,67$.



CHAPITRE 4

VECTEURS ALÉATOIRES

1 Introduction

On peut généraliser la notion de variable aléatoire au cas de deux ou plusieurs dimensions. dans ce chapitre nous n'allons considérer en détail que les vecteurs de dimension deux. Cependant, l'extension de définitions au cas multidimensionnel est immédiate.

2 Vecteurs aléatoires discrets

2.1 Loi conjointe

Définition 2.1. On se donne X et Y deux variables aléatoires discrètes de support D_X et D_Y respectivement et qui sont définis sur le même espace des événements Ω.
La *loi conjointe* du couple (X, Y) est donnée par $(X, Y)(\Omega)$ (ou par $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$) ainsi que par les probabilités

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y) = P\{w, X(w) = x \text{ et } Y(w) = y\}$$

pour tout couple $(x, y) \in (X, Y)(\Omega)$.
La fonction de probabilité conjointe $P(x, y)$ possède les propriétés suivantes :

(i) $p_{X,Y}(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D_X \times D_Y$;

(ii) $\sum\limits_{x \in D_X} \sum\limits_{y \in D_Y} p_{X,Y}(x, y) = 1.$

La *fonction de répartition conjointe*, notée $F_{X,Y}$, est définie par

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x \text{ et } Y \leq y) = \sum_{u \leq x} \sum_{v \leq y} p_{X,Y}(u, v).$$

Exemple 2.1 .
Soit $p \in]0,1[$ et $\lambda > 0$. On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) défini sur $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1-p & \text{si } x = 0 \text{ et } y = 0 \\ p\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{si } x = 1 \text{ et } y = k, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a bien :

— $p_{X,Y} \geq 0$,
— $\sum\limits_{x \in D_X} \sum\limits_{y \in D_Y} p_{X,Y}(x,y) = 1$.

Donc l'application ainsi définie décrit bien une loi d'un couple aléatoire discret.

Exemple 2.2 .
Considérons la fonction de probabilité conjointe $p_{X,Y}$, donnée par le tableau suivant :

y \ x	-1	0	1
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$
2	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{6}{16}$

On peut vérifier que la fonction $p_{X,Y}$ possède bien les deux propriétés données. De plus, si on veut calculer $F_{X,Y}(0, \frac{1}{2})$ alors on a La fonction de répartition conjointe, notée $F_{X,Y}$, est définie par

$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{u \leq 0} \sum_{v \leq \frac{1}{2}} p_{X,Y}(x,y) = p_{X,Y}(-1,0) + p_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{8}.$$

2.2 Loi marginale

Définition 2.2. Les *lois marginales* du couple (X, Y) sont les lois des variables aléatoires X et Y. On les obtient de la façon suivante :

$$P(X = x) = \sum_{y \in D_Y} P(X = x, Y = y),$$

et

$$P(Y = y) = \sum_{x \in D_X} P(X = x, Y = y),$$

Car l'événement "$X = x$" peut s'écrire "$X = x, Y \in D_Y$" et on a

$$"X = x, Y \in D_Y" = \bigcup_{y \in D_Y} "X = x, Y = y"$$

Comme l'union est disjointe et dénombrable, on a

$$P(X = x) = P(\bigcup_{y \in D_Y} "X = x, Y = y") = \sum_{y \in D_Y} P(X = x, Y = y).$$

De même,
L'événement "$Y = y$" peut s'écrire "$Y = y, X \in D_X$" et on a

$$"Y = y, X \in D_X" = \bigcup_{x \in D_x} "X = x, Y = y"$$

On a alors

$$P(Y = y) = P(\bigcup_{x \in D_X} "X = x, Y = y") = \sum_{x \in D_X} P(X = x, Y = y).$$

Exemple 2.3 .
Pour l'exemple 2.1, on a :

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 - p & \text{si } x = 0 \text{ et } y = 0 \\ p\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{si } x = 1 \text{ et } y = k, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

X est défini sur $\{0, 1\}$ et Y est défini sur $\mathbb{N}$, donc

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \sum_{y \in \mathbb{N}} P(X = 0, Y = y) = 1 - p \\ P(X = 1) &= \sum_{y \in \mathbb{N}} P(X = 1, Y = y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= p\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{\lambda} = p \end{aligned}$$

La loi marginale de X s'écrit alors

$$P(X=x)=p(x)=\begin{cases}p & \text{si } x=1\\ 1-p & \text{si } x=0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

De même, on a

$$P(Y=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)=1-p+p\,\mathrm{e}^{-\lambda}$$

Pour $Y=k\geq 1$,

$$P(Y=k)=P(X=0,Y=k)+P(X=1,Y=k)=p\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$

La loi marginale de Y s'écrit alors

$$P(Y=y)=\begin{cases}1-p+p\,\mathrm{e}^{-\lambda} & \text{si } y=0\\ p\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{si } y=k\in\mathbb{N}^*.\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Remarque .

Les lois marginales sont des fonctions de masses des variables aléatoires discrètes, par conséquent elle doivent avoir les propriétés d'une fonction de masse. En particulier, on peut vérifier que $\sum\limits_{x\in D_x} P(X=x)=1$ et que $\sum\limits_{y\in D_Y} P(Y=y)=1$. D'ailleurs dans cet exemple, on a $X\sim B(p)$.

Exemple 2.4 .

Reprenons l'exemple 2.2 :

y \ x	-1	0	1
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$
2	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{6}{16}$

Les lois marginales des v.a.r X et Y, définis respectivement sur les ensembles $D_X=\{-1,0,1\}$ et $D_Y=\{0,1,2\}$, s'obtiennent en calculant les sommes des colonnes pour X et lignes pour Y. On aura

alors

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & \text{si } x=-1\\ \frac{3}{16} & \text{si } x=0\\ \frac{9}{16} & \text{si } x=1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$P(Y=y)=\begin{cases}\frac{3}{16} & \text{si } y=0\\ \frac{1}{4} & \text{si } y=1\\ \frac{9}{16} & \text{si } y=2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

2.3 Variables aléatoires indépendantes

Définition 2.3. Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont dites *indépendantes* si et seulement si

$$\forall (x,y)\in D_X\times D_Y, P_{X,Y}(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y).$$

Exemple 2.5 .
Dans l'exemple 2.2, on a $P(X=-1,Y=0)=\frac{1}{4}$, $P(X=-1)=\frac{1}{4}$ et $P(Y=0)=\frac{3}{16}$.
Donc $P_{X,Y}(X=-1,Y=0)\neq P(X=-1)\times P(Y=0)$. Par conséquent les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

2.3.1 Propriétés de variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux v.a.r indépendantes d'espérance $E(X)$, $E(Y)$ et de variance $V(X)$, $V(Y)$ respectivement. Alors on a :

— $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$,
— $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$,
— $E(XY)=E(X)E(Y)$.

2.4 Loi conditionnelle

Définition 2.4. Soit X et Y deux variables aléatoires. Soit A_X un événement défini en fonction de X. On définit la probabilité conditionnelle de Y sachant A_X par

$$p_Y(y/A_X)=P(Y=y/A_X)=\frac{P(\text{"}Y=y\text{"}\cap A_X)}{P(A_X)} \text{ si } P(A_X)>0.$$

De même, on peut définir

$$p_X(x/A_Y) = P(X = x/A_Y) = \frac{P(\text{"}X = x\text{"} \cap A_Y)}{P(A_Y)} \text{ si } P(A_Y) > 0.$$

Exemple 2.6 .
On reconsidère l'exemple 2.1, on a

$$P(Y = k/X = 1) = \frac{P(Y = k, X = 1)}{P(X = 1)} = \frac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}}{p} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$

La loi conditionnelle de Y sachant "$X = 1$" est donc une variable qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

3 Vecteurs aléatoires continus

3.1 Loi conjointe

Définition 3.1. Soit X et Y deux variables aléatoires continues, la généralisation de la notion de fonction de densité au cas de dimension 2 est la fonction de densité conjointe $f_{X,Y}$ du couple (X, Y) qui possède les propriétés suivantes :

— $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ pour tout couple (x, y) ;
— $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)dxdy = 1$.

La fonction de répartition conjointe est alors définie par

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u, v)dudv.$$

Exemple 3.1 .
Considérons la fonction $f_{X,Y}$ définie par

$$f_{X,Y}(x, y) = 4xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \text{ pour } x \geq 0, y \geq 0$$

On a bien

— $f_{X,Y}(x, y) = 4xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \geq 0$;

— On a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} 4xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dxdy \\ &= 4\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx \int_0^{+\infty} y\,\mathrm{e}^{-y^2}\,dy \\ &= 4\left[-\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2}\right]_0^{+\infty}\left[-\frac{\mathrm{e}^{-y^2}}{2}\right]_0^{+\infty} \\ &= 4\frac{1}{4} = 1.\end{aligned}$$

Donc $f_{X,Y}$ définit bien une fonction de densité de probabilité conjointe.
La fonction de répartition conjointe du couple (X,Y) est donnée par

$$\begin{aligned}F_{X,Y}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)dudv \\ &= \int_0^x\int_0^y 4uv\,\mathrm{e}^{-u^2-v^2}\,dudv \\ &= \int_0^x 2u\,\mathrm{e}^{-u^2}\,du \int_0^y 2v\,\mathrm{e}^{-v^2}\,dv \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-u^2}\right]_0^x\left[-\mathrm{e}^{-v^2}\right]_0^y \\ &= (1-\mathrm{e}^{-x^2})(1-\mathrm{e}^{-y^2}) \text{ pour } x\geq 0 \text{ et } y\geq 0.\end{aligned}$$

3.2 Loi marginale

Définition 3.2. Les fonctions de densité marginales de X et Y sont définies par

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$

Et

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

Exemple 3.2 .
Soit $f_{X,Y}$ une fonction de densité conjointe de X et Y donnée par

$$f_{X,Y}(x,y) = 4xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \text{ pour } x\geq 0, y\geq 0$$

On a alors

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^{+\infty} 4xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dy \\ &= 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^{+\infty} 2y\,\mathrm{e}^{-y^2}\,dy = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\left[-\mathrm{e}^{-y^2}\right]_0^{+\infty} \\ &= 2x\,\mathrm{e}^{-x^2} \text{ pour } x \geq 0 \end{aligned}$$

De même, nous avons

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^{+\infty} 4xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dy \\ &= 2y\,\mathrm{e}^{-y^2}\int_0^{+\infty} 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = 2y\,\mathrm{e}^{-y^2}\left[-\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^{+\infty} \\ &= 2y\,\mathrm{e}^{-y^2} \text{ pour } y \geq 0 \end{aligned}$$

3.3 Indépendance

Définition 3.3. Les variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si et seulement si

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \text{ pour tout couple } (x,y)$$

Exemple 3.3 .
Les v.a.r X et Y définis dans l'exemple 3.2, sont indépendantes car

$$f_{X,Y}(x,y) = 4xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,2y\,\mathrm{e}^{-y^2} = f_X(x) \times f_Y(y)$$

pour tout couple (x,y)

3.4 Loi conditionnelle

Définition 3.4. Soit A_Y un événement ne dépendant que de la v.a.r Y. La fonction de densité conditionnelle de X, sachant que A_Y s'est réalisé, est donnée par

$$f_X(x/A_Y) = \frac{\int_{A_Y} f_{X,Y}(x,y)dy}{P(A_Y)} \text{ si } P(A_Y) > 0$$

Si A_Y est un événement de la forme "$Y = y$", on a

$$f_X(x/y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \text{ si } f_Y(y) > 0$$

Exemple 3.4 .
Reprenons l'exemple 3.2. On veut calculer la densité de probabilité conditionnelle de X sachant $A_Y = "Y \in [1,2]"$. On a alors

$$\begin{aligned} f_X(x/A_Y) &= \frac{\int_{A_Y} f_{X,Y}(x,y)dy}{P(A_Y)} = \frac{\int_1^2 4xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dy}{\int_1^2 2y\,\mathrm{e}^{-y^2}\,dy} \\ &= \frac{2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_1^2 2y\,\mathrm{e}^{-y^2}\,dy}{\int_1^2 2y\,\mathrm{e}^{-y^2}\,dy} \\ &= 2x\,\mathrm{e}^{-x^2} \text{ pour } x \geq 0 \end{aligned}$$

4 Espérance conditionnelle

Définition 4.1. Soit X et Y deux v.a.r. On définit *l'espérance conditionnelle* de Y sachant que $X = x$ par

$$E(Y/X = x) = \begin{cases} \sum_{y \in D_Y} y p_Y(y/x) & \text{si } (X,Y) \text{ est discret} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y/x)dy & \text{si } (X,Y) \text{ est continu} \end{cases}$$

Exemple 4.1 .
On reprend l'exemple 2.1 :

y \ x	-1	0	1
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$
2	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{6}{16}$

On veut calculer $E(Y/X=0)$. On a alors

$$\begin{aligned} E(Y/X=0) &= \sum_{y\in D_Y} yp(y/x=0) \\ &= 0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{1}{16}+2\times\frac{1}{16} \\ &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

Exemple 4.2 .
Pour les v.a.r X et Y de l'exemple 3.2,

$$E(Y/X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y/x)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} y\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}dy=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy$$

Puisque X et Y sont indépendants (voir 3.3).
Donc

$$\begin{aligned} E(Y/X=x)=E(Y) &= \int_0^{+\infty} 2y^2\,\mathrm{e}^{-y^2}\,dy \\ &= \left[-y\,\mathrm{e}^{-y^2}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,dy \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (1)} \end{aligned}$$

5 Covariance et coefficient de corrélation

5.1 Covariance

Définition 5.1. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires ayant comme espérances μ_X,μ_Y respectivement. On définit alors *la covariance* de X et Y par

$$\mathrm{COV}(X,Y)=E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$

(1). On utilise ici l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha u^2}\,du=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

5.1.1 Propriété de la covariance

(i) On peut montrer que $\mathrm{COV}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, car on a

$$\begin{aligned}\mathrm{COV}(X,Y) = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] = E\left[XY - \mu_Y X - \mu_X Y + \mu_X\mu_Y\right] \\ E(XY) - \mu_Y E(X) - \mu_X E(Y) + \mu_X\mu_Y = E(XY) - E(X)E(Y)\end{aligned}$$

(ii) Dans le cas où X et Y sont indépendantes, on a d'après les propriétés des variables aléatoires indépendantes, $E(XY) = E(X)E(Y)$. Par conséquent

$$\mathrm{COV}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0.$$

La réciproque n'est pas toujours vraie.

(iii) Si X et Y sont des v.a.r. normales alors on a l'équivalence

$$X, Y \text{ sont indépendants} \iff \mathrm{COV}(X,Y) = 0$$

(iv) On a $\mathrm{COV}(X,X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = V(X)$. Donc la variance est un cas particulier de la covariance. Cependant, contrairement à la variance, la covariance peut être négative.

(v) On peut facilement montrer que

$$V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\,\mathrm{COV}(X,Y)$$

5.2 Coefficient de corrélation

Définition 5.2. Le *coefficient de corrélation* de deux variables X et Y est donné par

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{COV}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

5.2.1 Propriétés de ρ_{XY}

— On a toujours $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.
— Si X et Y sont indépendantes alors $\rho_{XY} = 0$. La réciproque n'est pas toujours vraie.
— Si X et Y sont des v.a.r. normales alors on a l'équivalence

$$X, Y \text{ sont indépendants} \iff \rho_{XY} = 0$$

Exemple 5.1 .

On reprend l'exemple 2.1 :

y \ x	-1	0	1
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$
2	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{6}{16}$

Avec

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & \text{si } x=-1\\ \frac{3}{16} & \text{si } x=0\\ \frac{9}{16} & \text{si } x=1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$P(Y=y)=\begin{cases}\frac{3}{16} & \text{si } y=0\\ \frac{1}{4} & \text{si } y=1\\ \frac{9}{16} & \text{si } y=2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On veut calculer $\mathrm{COV}(X,Y)$ et ρ_{XY}. On a

$$E(X)=\sum_{x\in D_X} xp(x)=-1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{3}{16}+1\times\frac{9}{16}=\frac{5}{16}$$

$$E(X^2)=\sum_{x\in D_X} x^2p(x)=(-1)^2\times\frac{1}{4}+(0)^2\times\frac{3}{16}+(1)^2\times\frac{9}{16}=\frac{13}{16}$$

$$E(Y)=\sum_{y\in D_Y} yp(y)=0\times\frac{3}{16}+1\times\frac{4}{16}+2\times\frac{9}{16}=\frac{22}{16}$$

$$E(Y^2)=\sum_{y\in D_Y} y^2p(y)=(0)^2\times\frac{3}{16}+(1)^2\times\frac{4}{16}+(2)^2\times\frac{9}{16}=\frac{40}{16}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x\in D_X}\sum_{y\in D_Y} xyp_{X,Y}(x,y) = 0 + (-1)\times(1)\times\frac{1}{16} + (-1)\times(2)\times\frac{2}{16} + 0 + 0 + 0 + 0 \\ &\quad + (1)\times(1)\times\frac{2}{16} + (1)\times(2)\times\frac{6}{16} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{13}{16} - \left(\frac{5}{16}\right)^2 = \frac{183}{16^2}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{40}{16} - \left(\frac{22}{16}\right)^2 = \frac{156}{16^2}$$

$$\mathrm{COV}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{9}{16} - \left(\frac{5}{16}\right)\left(\frac{22}{16}\right) = \frac{34}{16^2}$$

Finalement on calcule

$$\rho_{XY} = \frac{34/16^2}{\sqrt{(183/16^2)(156/16^2)}} \approx 0.2012.$$

Exemple 5.2 .
La fonction de densité conjointe du vecteur aléatoire (X,Y) est donnée par

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-2y} & \text{si } 0 \le x \le 2, y \ge 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les fonctions de densité marginales sont calculées par

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2y}\,dy = \left[-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2y}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

avec $0 \le x \le 2$.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^2 \mathrm{e}^{-2y}\,dx = \mathrm{e}^{-2y}\,[x]_0^2 = 2\,\mathrm{e}^{-2y}$$

avec $y \ge 0$.
Donc $X \sim \mathcal{U}(0,2)$ et $Y \sim \mathcal{E}(2)$. On peut aussi remarquer que X et Y sont indépendantes puisque

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2}2\,\mathrm{e}^{-2y} = \mathrm{e}^{-2y} = f_{X,Y}(x,y)$$

avec $0 \le x \le 2, y \ge 0$.
Par conséquent $\rho_{XY} = 0$.

6 Somme de variables aléatoires

6.1 Somme de variables aléatoires discrètes

Définition 6.1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définis respectivement sur D_X et D_Y, de fonctions de masse p_X et p_Y et soit $Z = X + Y$. On veut déterminer la loi de Z.
On a $P(Z = z) = P(X + Y = z) = \sum_{x \in D_X} P(X = x, Y = z - x)$.
Si X et Y sont indépendantes on aura

$$P(Z = z) = \sum_{x \in D_X} P(X = x)P(Y = z - x).$$

Exemple 6.1 .
On lance deux dés simultanément. soient X et Y le nombre de points du premier et second dé respectivement.
Donc X et Y sont indépendants et suivent toutes les deux la loi uniforme discrète de support $D_X = D_Y = \{1, 2, \ldots, 6\}$. On définit la v.a.r $Z = X + Y$, soit la somme de points obtenus sur les deux dés. Il est clair alors que $D_Z = \{2, 3, \ldots, 12\}$ et puisque X et Y sont indépendantes (puisque le résultat du premier dé ne dépend pas de celui du second dé), on a

$$P(Z = z) = \sum_{x \in D_X} P(X = x)P(Y = z - x).$$

Donc, si on veut calculer $P(Z = 3)$ on aura

$$P(Z = 3) = \sum_{x \in D_X} P(X = x)P(Y = 3 - x) = P(X = 1)P(Y = 2) + P(X = 2)P(Y = 1) = \frac{2}{36}.$$

et

$$\begin{aligned} P(Z = 4) &= \sum_{x \in D_X} P(X = x)P(Y = 4 - x) \\ &= P(X = 1)P(Y = 3) + P(X = 2)P(Y = 2) + P(X = 3)P(Y = 1) = \frac{3}{36} \end{aligned}$$

Exemple 6.2 .
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que la donnée de probabilité conjointe est donnée par le tableau suivant :

y \ x	-1	0	1
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$
2	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{6}{16}$

On définit $Z = X+Y$. Il est clair que $D_Z = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Puisque X et Y ne sont pas indépendants, on a

$$P(Z = z) = P(X + Y = z) = \sum_{x \in D_X} P(X = x, Y = z - x).$$

Donc

$$\begin{aligned}
P(Z = -1) &= \sum_{x \in D_X} P(X = x, Y = -1 - x) = p_{X,Y}(-1, 0) = \frac{1}{16} \\
P(Z = 0) &= \sum_{x \in D_X} P(X = x, Y = 0 - x) = p_{X,Y}(0, 0) + p_{X,Y}(-1, 1) = \frac{2}{16} \\
P(Z = 1) &= \sum_{x \in D_X} P(X = x, Y = 1 - x) = p_{X,Y}(1, 0) + p_{X,Y}(-1, 2) + p_{X,Y}(0, 1) = \frac{4}{16} \\
P(Z = 2) &= \sum_{x \in D_X} P(X = x, Y = 2 - x) = p_{X,Y}(1, 1) + p_{X,Y}(0, 2) = \frac{3}{16} \\
P(Z = 3) &= \sum_{x \in D_X} P(X = x, Y = 3 - x) = p_{X,Y}(1, 2) = \frac{6}{16}
\end{aligned}$$

La fonction de masse de la v.a.r Z est alors donnée par

$$p_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{16} & \text{si } z = -1 \\ \frac{2}{16} & \text{si } z = 0 \\ \frac{4}{16} & \text{si } z = 1 \\ \frac{3}{16} & \text{si } z = 2 \\ \frac{6}{16} & \text{si } z = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

6.2 Somme de variables aléatoires continues

Définition 6.2. Soient X et Y deux v.a.r absolument continues de densités de probabilité f et g respectivement. Soit $Z = X + Y$. On a par définition

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \int\int_{x+y\leq z} f(x)g(y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-y} f(x)g(y)dxdy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{z-y} f(x)dx)g(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-y)g(y)dy.$$

Pour obtenir la densité de probabilité de Z, on dérive $F_Z(z)$ par rapport à z, on obtient

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy$$

la fonction h est appelée *produit de convolution* de f et g.

Exemple 6.3 .
Considérons $Z = X + Y$ où $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Donc on a

$$f(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0$$

et

$$g(y) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda y} \text{ si } y \geq 0$$

On a aussi

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy = \int_0^{+\infty} [\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda(z-y)}]\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda y}\, dy.$$

Il est clair que si $z < 0$ alors $h(z) = 0$, et si $z \geq 0$,on a $x + y \geq 0$.
D'autre part on a $x = z - y \geq 0 \Rightarrow y \leq z$. Donc

$$h(z) = \int_0^z \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda(z-y)}\, \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda y}\, dy = \lambda^2 z\, \mathrm{e}^{-\lambda z}\,.$$

Ainsi la densité de probabilité de la v.a.r Z est égale à $\lambda^2 z\, \mathrm{e}^{-\lambda z}$ si $z \geq 0$.

6.3 Applications aux lois usuelles

— **Somme de v.a.r de loi Binomiale.** La somme de n v.a.r $X_1, X_2, ..., X_n$ de loi Binomiale de paramètres $(n_i, p), i = 1..n$ est une v.a.r qui suit la loi Binomiale de paramètres $(\sum_{i=1}^{n} n_i, p)$.

— **Somme de v.a.r de loi de Poisson.** La somme de n v.a.r $X_1, X_2, ..., X_n$ de loi Poisson de paramètre $\lambda_i, i = 1..n$ est une v.a.r qui suit la loi de Poisson de paramètre $(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$.

— **Somme de v.a.r de loi Exponentielle.** La somme de n v.a.r $X_1, X_2, ..., X_n$ de loi Exponentielle de paramètre λ, est de loi Gamma de paramètres (n, λ).

— **Somme de v.a.r de loi Normale.** La somme de n v.a.r $X_1, X_2, ..., X_n$ où $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i)$ est une v.a.r qui suit la loi Normale de paramètres $(\sum_{i=1}^{n} m_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2})$.

7 Théorème Central Limite

Théorème 7.1 .

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité, ayant la même loi $\mathcal{L}$ et indépendantes. Supposons que l'espérance $E(X_i) = m$ et l'écart-type $\sqrt{V(X_i)} = \sigma$ de la loi $\mathcal{L}$ existent et soient finis ($V(X_i) \neq 0$).

On considère la variable aléatoire, la somme $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Il s'ensuit que l'espérance de S_n est égal à nm et son écart-type vaut $\sigma\sqrt{n}$ (voir Propriétés des variables aléatoires indépendantes). Alors on a $S_n \sim \mathcal{N}(nm, \sigma\sqrt{n})$ ou encore $Z_n = \dfrac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ lorsque n tend vers l'infini.

Exemple 7.1 .

Une compagnie aérienne donne des réservations sur le vol d'un appareil de 400 places. La probabilité qu'un passager ayant réservé pour ce vol ne se présente pas est de 0.08.

Si la compagnie accorde 420 réservations sur ce vol, quel est le risque de "surbooking" (c'est à dire qu'il se présente plus de passagers que les 400 qui pourront embarquer) ?

Soit X_i la v.a.r de Bernoulli qui modélise la présence $(X_i = 1)$ ou non $(X_i = 0)$ du i-ème passager réservé, $i = 1..n$, avec $n = 420$.

Par hypothèse $X_i \sim B(p)$, avec $p = 1 - 0.08 = 0.92$, et on suppose que les X_i sont indépendants.

On a donc $m = E(X_i) = p$ et $\sigma = \sqrt{V(X_i)} = \sqrt{p(1-p)}$.

Soit $S_{420} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{420}$, le nombre "aléatoire" de passagers ayant réservé, qui se présentent effectivement à l'enregistrement.

Sous nos hypothèses , $E(S_{420}) = np = 420 \times 0.92 = 386.4$ et $V(S_{420}) = np(1-p) = 420 \times 0.92 \times 0.08 = 30.912$.

Soit $Z_{420} = \dfrac{S_{420} - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, donc d'après le Théorème Central Limite, Z_{420} suit une loi normale centrée réduite. D'autre part, on cherche à calculer $P(S_{420} \geq 400)$. Pour cela, calculons

$$P(S_{420} \leq 400) = P(\frac{S_{420} - 386.4}{\sqrt{30.912}} \leq \frac{400 - 386.4}{\sqrt{30.912}}) = P(Z_{420} \leq 2.45) = \Pi(2.45) = 0.99286.$$

D'où $P(S_{420} \geq 400) = 0.00714$.

8 Exercices

Exercice 23. Soit X, Y deux variables aléatoires. Montrer les propriétés suivantes :

1. $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\,\mathrm{COV}(X, Y)$.
2. La matrice de variance-covariance Σ est semi positive.
3. Le coefficient de corrélation $\rho_{X,Y} \in [-1, 1]$.

Exercice 24. On considère un couple de v.a (X, Y) tel que X et Y sont indépendants. Montrer les propriétés suivantes :

1. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$,
2. $E(XY) = E(X)E(Y)$
3. $V(X + Y)$=$V(X) + V(Y)$

Exercice 25. Soit X, Y et Z, trois variables aléatoires. Soit $c \in \mathbb{R}$ une constante. Montrer les propriétés suivantes :

1. $\mathrm{COV}(cX, Y) = c\,\mathrm{COV}(X, Y)$.
2. $\mathrm{COV}(X, c) = 0$.
3. $\mathrm{COV}(X + Y, Z) = \mathrm{COV}(X, Z) + \mathrm{COV}(Y, Z)$.
4. $\mathrm{COV}(X, Y + Z) = \mathrm{COV}(X, Y) + \mathrm{COV}(X, Z)$.

Exercice 26. Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ un vecteur aléatoire de dimension n ayant une matrice de variance-covariance Σ_X.

1. Vérifier que Σ_X peut s'écrire sous la forme

$$\Sigma_X = (\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))\,(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))^T$$

   où $E(\mathbf{X}) = (E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_1))^T$
2. Soit $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + b$ un vecteur aléatoire tel que $\mathbf{A}$ est une $m \times n$ matrice et $\mathbf{b}$ un m-vecteur.
   Soit Σ_Y la matrice de variance-covariance du vecteur $\mathbf{Y}$.
   — Montrer que

$$\Sigma_Y = \mathbf{A}\Sigma_X\mathbf{A}^T$$

Exercice 27. Soit X et Y deux indépendants v.a uniformes sur l'intervalle $[0,1]$. On définit les vecteurs

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} X \\ X+Y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ X+Y \end{pmatrix}$$

— Les matrices $\Sigma_{\mathbf{U}}$ et $\Sigma_{\mathbf{V}}$ sont-elles définies positives ?

Exercice 28. La loi du couple de variables aléatoires (X,Y) est définie dans le tableau suivant :

X \ Y	1	2	3
1	0	0.5	0
2	0.25	0	0.25

1. Déterminer les lois marginales de X et Y.
2. Calculer $P(X = 2 \mid Y \geq 2)$.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathrm{COV}(X,Y)$. Discuter ce résultat.

Exercice 29. La loi conjointe d'un couple de variables aléatoires discrètes est donnée par

$$P(x,y) = \begin{cases} c(2x+y) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \qquad \text{et } 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la constante c,
2. Calculer $P(X = 2, Y = 1)$ et $P(X \geq 2, Y \geq 1)$
3. Déterminer les lois marginales de X et Y.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 30. On note N la variable aléatoire comptant le nombre d'œufs qu'un insecte donné pond. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
On suppose également que chaque œuf donne naissance à un nouvel insecte avec probabilité p, indépendamment de l'éclosion des autres œufs. On considère alors une famille $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. On suppose que les variables aléatoires $N, X_1, X_2, \ldots$ sont indépendantes et on note D le nombre de descendants de l'insecte.

1. Écrire D en fonction des variables N et X_i.
2. Pour tout (d, n), calculer $P(D = d \mid N = n)$.
3. En déduire la loi de D et la loi du couple $Z = (D, N)$

Exercice 31. Soit le couple de v.a.(X, Y) défini par la densité de probabilité conjointe :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xy}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que $\int \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy = 1$.
2. Calculer $P(X \leq 1, Y \geq 1)$.
3. Déterminer les lois marginales de X et Y.
4. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
5. Donner $f(Y \mid X)$ et $f(X \mid Y)$.

Exercice 32. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité :

$$f(x,y) = \begin{cases} k\,\mathrm{e}^{-\dfrac{x^2+y^2}{2}} & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer k.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathrm{COV}(X, Y)$ et le coefficient de corrélation.

Exercice 33. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Poisson de paramètres λ et μ respectivement. Trouver la loi de $Z = X + Y$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Feller. *AN INTRODUCTION TO PROBABILITY : THEORY AND ITS APPLICATIONS, 3RD ED*. Number 1 in Wiley series in probability and mathematical statistics. Wiley India Pvt. Limited, 2008.

[2] C. Leboeuf, J.L. Roque, and J. Guegand. *Cours de probabilités et de statistiques*. Mathématiques : premiers cycles de l'enseignement supérieur. Ellipses, 1996.

[3] M. Lefebvre. *Probabilités, statistique et applications*. Presses internationales Polytechnique, 2011.

[4] G. Pupion, J. Genet, and M. Repussard. *Probabilités, statistiques et sondages : cours moderne et exercices corrigés*. Vuibert, 1974.

[5] K. Redjdal. *Cours de Probabilités*. OPU, 2004.

[6] V.K. Rohatgi and A.K.M.E. Saleh. *An Introduction to Probability and Statistics*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2011.

[7] G. Saporta. *Probabilités, analyse des données et statistique*. Technip, 2011.

[8] P. Tassi and S. Legait. *Théorie des probabilités en vue des applications statistiques*. Publications de l'Institut français du pétrole. Technip, 1990.